

Reine Mathematik

Skalare Krümmung singulärer Räume

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich „Mathematik und
Informatik“
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Andreas Bernig
aus Leipzig
– 2000 –

Zusammenfassung

Das Thema dieser Arbeit befindet sich zwischen Reeller Algebraischer Geometrie einerseits und Riemannscher Geometrie andererseits. Motiviert durch Resultate über Riemannsche Varietäten wird ein skalares Krümmungsmaß für Mengen eingeführt, die definierbar in \mathcal{O} -minimalen Strukturen sind (z.B.: semialgebraische oder subanalytische Mengen). Die Hauptresultate zeigen, daß diese Definition die Eigenschaften erfüllt, die man von einer Skalarkrümmung erwartet.

Hat die betrachtete definierbare Menge nach oben bzw. unten beschränkte Schnittkrümmung im Sinne der synthetischen Differentialgeometrie, so ist auch das Skalarkrümmungsmaß nach oben bzw. unten beschränkt. Weiterhin ist das Skalarkrümmungsmaß unabhängig von einer Einbettung in einen Euklidischen Raum, hängt also nur von der inneren Metrik ab. Schließlich werden Variationsformeln aus der glatten auf die singuläre Situation verallgemeinert.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
1 Skalarkrümmung definierbarer Mengen	11
1.1 O-minimale Systeme	11
1.2 Geometrische Kategorien	12
1.2.1 Korrespondenz zwischen Analytisch-Geometrischen Kategorien und o-minimalen Strukturen	13
1.3 Definition der Skalarkrümmung	14
1.4 Berechnung der Skalarkrümmung	17
1.4.1 Skalarkrümmung auf m -Straten	17
1.4.2 Skalarkrümmung auf $m - 1$ -Straten	20
1.4.3 Skalarkrümmung auf $m - 2$ -Straten	23
1.5 \mathcal{C} -Mengen	25
2 Dichte und innere Geometrie	29
2.1 Zweidimensionaler Fall	29
2.2 Vergleich der Dichten	32
2.3 Produkttheorem	33
2.4 Die Querschnittsformel	36
2.5 Das Reflexionsgesetz	44
3 Alexandrovräume	51
3.1 Alexandrovräumen	51
3.2 Beweis des Theorems	53

3.2.1	Topologische Konsequenzen aus der Alexandrovbedingung	54
3.2.2	Straten höchster Dimension	57
3.2.3	Straten der Kodimension 1	57
3.2.4	Die Dichte von Alexandrovräumen	65
3.2.5	Straten der Kodimension 2	66
4	Räume mit $K \leq \kappa$	67
4.1	Räume mit nach oben beschränkter Krümmung	69
4.2	Beweis des Theorems	70
4.2.1	Straten der Kodimension 2	70
4.2.2	Straten der Kodimension 1, in denen genau zwei m - Straten eintreffen	74
4.2.3	Straten der Kodimension 1, in denen mehr als zwei m - Straten eintreffen	83
4.2.4	Die Dichte von CAT-Räumen	85
5	Invarianz	87
6	Konforme Variation	93
6.1	Satz von Gauss	94
6.2	Beweis der Variationsformel	96
	Literaturverzeichnis	105

Einführung

*„Man kann eine Grenze nur erkennen,
wenn man sie zu überschreiten versucht.“*

Heinrich Böll

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Krümmungseigenschaften von singulären Mengen. Motiviert durch Betrachtungen der Differentialgeometrie führen wir das Skalarkrümmungsmaß von solchen Mengen ein und untersuchen es auf seine Eigenschaften. Es stellt sich heraus, daß für diese Verallgemeinerung der Skalarkrümmung klassische Theoreme ihre Gültigkeit behalten.

Dieses Thema befindet sich zwischen Riemannscher und subanalytischer Geometrie, was seinen Reiz ausmacht. Erst das Zusammenspiel beider Gebiete ermöglicht es, die Haupttheoreme der Arbeit zu beweisen.

In der Riemannschen Geometrie ist die Krümmung ein zentrales Objekt. Wichtige Theoreme beschreiben den Einfluß der Existenz einer Metrik mit gegebenen Krümmungseigenschaften auf die Topologie einer Mannigfaltigkeit. Beispiele hierzu sind Myers Theorem, der Bettizahlensatz von Gromov oder der Sphärensatz von Grove-Shiohama. Es stellt sich heraus, daß man zum Studium dieser Eigenschaften nicht nur feste Mannigfaltigkeiten betrachten muß, sondern Folgen von Mannigfaltigkeiten mit gegebenen Krümmungsschranken. Die Grenzwerte solcher Folgen in der Gromov-Hausdorff-Topologie sind im allgemeinen keine Mannigfaltigkeiten mehr, sondern nur noch metrische Räume.

Die in dieser Arbeit betrachteten „definierbaren“ Mengen sind einerseits allgemeiner als Riemannsche Mannigfaltigkeiten, da sie schwierige Singularitäten aufweisen können, andererseits spezieller und besser handhabbar als beliebige metrische Räume. Die Kategorie der definierbaren Mengen enthält semialgebraische und subanalytische Mengen, aber es gibt viele weitere Beispiele.

Die Möglichkeit, auch auf solchen singulären Mengen Krümmungen zu definieren, kristallisierte sich im Laufe dieses Jahrhunderts heraus. Mehrere Autoren

untersuchten verschiedene Klassen von singulären Mengen und zugeordneten Krümmungen. Wesentlich ist hier der Gebrauch der Integralgeometrie, die im Gegensatz zum Differentialformenkalkül auch für große Klassen von singulären Mengen brauchbare Ergebnisse liefert. Diese Entwicklung ist zu vergleichen mit der Theorie der Distributionen, wo man mit Hilfe von Integralen den Definitionsbereich von Differentialoperatoren erweitern kann.

Eine wichtige Klasse von Krümmungen sind Lipschitz-Killing-Krümmungen, die im klassischen Fall von H. Weyl eingeführt wurden. Die Übertragung auf definierbare Mengen kann über Integralgeometrie oder über geometrische Maßtheorie geschehen und wurde von Bröcker-Kuppe bzw. Fu erfolgreich durchgeführt.

Das Leitmotiv dieser Arbeit bildet die Beobachtung, daß eine der Lipschitz-Killing-Krümmungen als Skalarkrümmung interpretiert werden kann. Im klassischen Fall, d.h. für glatte Mannigfaltigkeiten, war dies schon lange bekannt. Diese Interpretation macht jedoch nur dann auch im singulären Fall Sinn, wenn man Sätze über die Skalarkrümmung von Mannigfaltigkeiten auf singuläre Mengen übertragen kann. Genau das wird in dieser Arbeit getan.

Welche klassischen Sätze kommen für die Übertragung in Frage? Zunächst stellt man fest, daß es nicht sehr viele Aussagen über die Skalarkrümmung gibt. Dieses Konzept ist (im Gegensatz zur Schnittkrümmung) zu schwach, um interessante Aussagen zur Geometrie und Topologie zu liefern. Dennoch gibt es solche Sätze, z.B. übertragen sich obere oder untere Schranken für die Schnitt- bzw. Ricci-Krümmung auf die Skalarkrümmung, es gibt die Lösung des Yamabe-Problems von Aubin und Schön sowie diverse Variationsformeln für das über die Skalarkrümmung definierte Hilbertfunktional. Existenzfragen im Zusammenhang mit der Skalarkrümmung von glatten Mannigfaltigkeiten führen auf wichtige offene Probleme, Stichwort ist hier die Gromov-Lawson-Vermutung.

Wir wollen jetzt andeuten, welche der erwähnten Aussagen Übertragungen auf die singuläre Situation haben.

Für den Fall von Mannigfaltigkeiten folgt offensichtlich aus einer oberen oder unteren Schranke für die Schnittkrümmung eine solche für die Skalarkrümmung. Im singulären Fall kennt man jedoch keine vernünftige Definition von Schnittkrümmung, so daß eine Übertragung dieser Aussage zunächst sinnlos erscheint. Die Idee liegt nun darin, daß man nicht genau wissen muß, was die Schnittkrümmung ist, um zu definieren, daß sie positiv oder negativ ist. Es gibt zwei Theorien, die diese Bedingungen an die Schnittkrümmung in rein metrischen Termen ausdrücken, welche auch noch für beliebige metrische Räume Sinn machen. Damit gewinnt die Aussage: „Ein metrischer Raum hat positive bzw. negative Krümmung“ eine konkrete Bedeutung, die im Falle von Riemannschen Mannigfaltigkeiten äquivalent zu der differentialgeometrischen Aussage ist. Die singulären Mengen, die wir in dieser Arbeit betrachten, tragen eine

Metrik und man kann deshalb davon sprechen, daß sie positive oder negative Schnittkrümmung besitzen.

Welche Schlußfolgerungen für die Skalarkrümmung kann man daraus ziehen? Die Skalarkrümmung ist keine Funktion wie im klassischen Fall, sondern ein signiertes Maß. Während man in der klassischen Situation aus einer Beschränkung für die Schnittkrümmung eine (punktweise) Beschränkung für die Skalarkrümmung gewinnt, erhält man im singulären Fall eine Beschränkung des Skalarkrümmungsmaßes. Diese Verallgemeinerung der klassischen Sätze ist der Hauptteil dieser Arbeit.

Wir skizzieren die benutzten Beweismethoden. Mit einer relativ geradlinigen Rechnung kann man das Skalarkrümmungsmaß unter Zuhilfenahme von geometrischen Größen ausdrücken. Diese Größen müssen dann unter der Voraussetzung von oberen bzw. unteren Schnittkrümmungsschranken abgeschätzt werden. Dazu benötigt man eine gute Kontrolle des inneren Abstandes bei singulären Metriken. Diese Kontrolle gewinnt man, sobald die betrachteten Mengen gewisse gute Stratifikationen haben. Die Kombination von Techniken der metrischen Differentialgeometrie mit Resultaten über diese Stratifikationen liefert dann die gewünschten Resultate.

Es wäre schön, analog zu der metrischen Definition von positiver bzw. negativer Schnittkrümmung definieren zu können, wann ein metrischer Raum positive bzw. negative Ricci-Krümmung besitzt. Das scheint ein schwieriges Problem zu sein, Ansätze dazu findet man in den Arbeiten von Cheeger und Colding. Hat man eine solche metrische Definition, so sollte für die Skalarkrümmung von singulären Mengen wieder die analoge Aussage wie im glatten Fall gelten, d.h. positive bzw. negative Ricci-Krümmung zieht positive bzw. negative Skalarkrümmung nach sich.

Wir kommen zu den Variationsformeln für die Skalarkrümmung. Hier besteht zunächst ein konzeptionelles Problem darin, daß man auf einer singulären Menge eine Klasse von Metriken betrachten möchte. Durch die Einbettung in einen Euklidischen Raum ist schon eine feste Metrik vorgegeben, wie kommt man also zu Variationen derselben? Hier hilft die Theorie der Analytisch-Geometrischen Kategorien weiter, mit deren Hilfe man eine gegebene Menge mit verschiedenen Metriken ausstatten und entsprechend verschiedene Skalarkrümmungen ausrechnen kann.

Eine natürliche Frage ist beispielsweise folgende: Kann man eine gegebene Metrik stets konform ändern, so daß die Skalarkrümmung konstant wird? Im klassischen Fall ist das das so genannte Yamabe-Problem, welches von Aubin und Schön im wesentlichen gelöst wurde. Leider ist eine Übertragung auf die singuläre Situation nicht möglich, wie man an einfachen Gegenbeispielen erkennen kann.

In der Riemannschen Geometrie untersucht man weiterhin das Hilbertfunktional, welches als Integral über die Skalarkrümmung einer Mannigfaltigkeit

definiert ist. Dieses Funktional spielt eine wesentliche Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie und führt zum Begriff der Einsteinmannigfaltigkeit. Wir untersuchen in dieser Arbeit Variationsformeln für das Hilbertfunktional unter konformen Änderungen der Metrik und zeigen, daß klassische Formeln ihre Gültigkeit behalten. Motiviert durch diese Ergebnisse können wir singuläre Mengen mit konstanter Skalarkrümmung definieren. Wir werden einige Beispiele für solche Mengen angeben.

Der allgemeine Fall, d.h. nicht notwendig konforme Änderungen der Metrik, soll in einer späteren Arbeit aufgegriffen werden. Die Schwierigkeiten, die dabei auftreten, lassen sich schon bei den Variationsformeln für konforme Änderungen der Metrik erahnen: gewisse Terme können unter Ausnutzung von klassischen Sätzen (Satz von Gauss, Satz von Stokes) gekürzt werden, aber die Gültigkeit dieser Sätze ist in der singulären Situation im allgemeinen nicht gewährleistet.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: im ersten Kapitel wird die Skalarkrümmung definiert und auf geometrische Größen zurückgeführt. Zentrale Begriffe wie Analytisch-Geometrische Kategorie, Lipschitz-Killing-Krümmung oder zahme Stratifikation werden eingeführt. Im zweiten Kapitel werden einige Sätze bereitgestellt, die von unabhängigem Interesse sind und in späteren Beweisen benutzt werden. Diese Sätze beziehen sich vor allem auf die Dichte von singulären Mengen sowie auf die Geometrie von Geodätischen. In den Kapiteln 3 und 4 werden die oben erläuterten Theoreme zum Zusammenhang zwischen Schnittkrümmung und Skalarkrümmung bewiesen. Diese beiden Theoreme bilden das Hauptergebnis dieser Arbeit. Die Beweise erfordern eine gute Kenntnis sowohl der metrischen Differentialgeometrie als auch der Theorie o -minimaler Strukturen. Nur das Zusammenspiel dieser Theorien ermöglicht die Beweisführung. Im 5. Kapitel wird gezeigt, daß die Skalarkrümmung eine innere Größe ist, d.h. nur von der Isometrieklasse, nicht aber von der Einbettung abhängt. Im 6. und letzten Kapitel untersuchen wir den Einfluß von konformen Variationen der Metrik auf die Skalarkrümmung. Es werden Beispiele für singuläre Mengen konstanter Skalarkrümmung angegeben. Abschließend gehen wir auf offene Probleme und weitere Fragestellungen ein, die sich ganz natürlich aus den Ergebnissen dieser Arbeit ergeben.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Professor Ludwig Bröcker für die kontinuierliche Betreuung meiner Forschung. Sein Interesse, seine Fragen und Anregungen haben viel zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.

Verschiedene Mathematiker haben durch ihre Ideen meine Arbeit beeinflußt. Krzysztof Kurdyka hat in einer ersten Fassung des Beweises des Theorems über die Alexandrovräume einen Fehler entdeckt, der sich zum Glück beheben ließ. Auf Joseph Fu geht die Idee zurück, im Theorem über Räume mit nach unten beschränkter Krümmung die Voraussetzung, daß die betrachtete Menge eine topologische Mannigfaltigkeit ist, durch die in der Arbeit angegebene zu ersetzen. Diskussionen mit Michel Coste, Georges Comte und Jean-Marie Lion haben zur Verbesserung der Darstellung beigetragen.

Notationen

Das Volumen des i -dimensionalen Einheitsballes wird mit b_i bezeichnet. Wir benötigen die Rekursionsformel $b_{i+2} = \frac{2\pi}{i+2}b_i$. Das Volumen der i -dimensionalen Einheitssphäre ist gegeben durch $s_i = (i+1)b_{i+1}$.

Die eindeutig bestimmte, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche

Raumform der Dimension m mit konstanter Krümmung κ und Dimension $m \geq 2$ wird mit H_κ^m bezeichnet. Für $\kappa = 0$ ist das der Euklidische Raum, für $\kappa > 0$ eine m -Sphäre mit geeignetem Radius und für $\kappa < 0$ ein geeigneter hyperbolischer Raum.

Wir schreiben $O(s)$ für einen Term, für den $\frac{O(s)}{s}$ bei $s \rightarrow 0$ beschränkt bleibt. Wenn dieser Ausdruck sogar gegen 0 konvergiert, so schreiben wir $o(s)$. Für Funktionen, die von s abhängen, bedeutet die Schreibweise $f \leq g + o(s)$, daß es einen Term $c(s)$ gibt, der sich wie $o(s)$ verhält und für den $f \leq g + c$ gilt. Wir sagen weiterhin, daß f asymptotisch kleiner gleich g ist, wenn $\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{g(s)} \leq 1$ gilt.

Für eine polynomiale Funktion in r bezeichnen wir den Koeffizienten vor r^m mit $\text{coeff}_m(f)$.

Das Zeichen \perp bedeutet orthogonales Komplement eines linearen Raumes. Oft haben wir es mit gepunkteten affinen Räumen (T, P) zu tun, in diesem Fall bezeichnet T^\perp den affinen Raum, der orthogonal zu T ist und durch P geht. Zum Beispiel ist $(T_P M)^\perp$ der affine Raum, der senkrecht auf dem Tangentialraum der eingebetteten Mannigfaltigkeit M steht und durch P geht.

Der Begriff „Geodätische“ steht im allgemeinen für „global kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten“. Anderenfalls sprechen wir von „lokalen Geodätischen“.

Kapitel 1

Skalarkrümmung definierbarer Mengen

Dieses Kapitel bildet die Grundlage für die weitere Arbeit. In ihm werden viele der benötigten Begriffe eingeführt und bereits einige wichtige Sätze bewiesen. Eine der Lipschitz-Killing-Krümmungen wird als Skalarkrümmung interpretiert. Die Richtigkeit dieser Definition wird in späteren Kapiteln untermauert. Die schwer zu durchschauende Definition der Skalarkrümmung, die stratifizierte Morsetheorie verwendet, wird durch die Ergebnisse von Abschnitt 1.4 beleuchtet, wo Formeln angegeben werden, die nur geometrische Größen verwenden. Das kann später dazu benutzt werden, in anderen Situationen die Skalarkrümmung durch eben diese Formeln zu definieren und macht auch dann noch Sinn, wenn gar keine Lipschitz-Killing-Krümmungen mehr gegeben sind.

1.1 O-minimale Systeme

Definition 1.1. *Ein O-minimales System ist eine Folge $\sigma = (\sigma_n)_{n=1,2,3,\dots}$ so daß*

- a) σ_n ist eine Boolesche Algebra des \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^n \in \sigma_n$.
- b) Für $1 \leq i < j \leq n$ ist die Menge $\{x_i = x_j\} \in \mathbb{R}^n$ enthalten in σ_n .
- c) Ist $X \in \sigma_n$, dann ist $X \times \mathbb{R} \in \sigma_{n+1}$ und $\mathbb{R} \times X \in \sigma_{n+1}$.
- d) Ist $X \in \sigma_{n+1}$, dann ist $\pi(X) \in \sigma_n$ wobei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten bezeichnet.
- e) Die Graphen von Addition und Multiplikation gehören zu σ_3 . (Äquivalent dazu: Die n -dimensionalen algebraischen Mengen sind Elemente in σ_n).

f) σ_1 besteht genau aus den endlichen Vereinigungen von Punkten und Intervallen.

Beispiele:

- Das kleinste Beispiel eines O-minimalen Systems bildet die Menge der semialgebraischen Mengen (siehe [B-C-R87]). Die Überprüfung der Bedingungen geschieht mit Hilfe des Prinzips von Tarski-Seidenberg.
- Global subanalytische Mengen bilden ein weiteres O-minimales System (\mathbb{R}_{an}). Sie sind definiert als Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, die in $P^n(\mathbb{R})$ subanalytisch sind. Damit werden Funktionen wie $\sin(x)$ ausgeschlossen, die zwar subanalytisch sind, aber in keiner o-minimalen Struktur liegen können.
- Über \mathbb{R}_{exp} definierte Mengen liefern ein O-minimales System ([Wil96]). Diese Mengen sind definiert über Formeln, in denen die Zeichen $+$, \cdot , $<$, \exp sowie die reellen Zahlen und logische Verknüpfungen vorkommen können. Beispielsweise ist der Graph der Exponentialfunktion in dieser Struktur definierbar.

Die grundlegenden Eigenschaften von O-minimalen Systemen kann man in [Dri98] nachlesen. Eine gute Einführung stellt [Cos00b] dar.

Für den weiteren Verlauf spielt es keine Rolle, welches konkrete O-minimale System wir ausgewählt haben. Deswegen sprechen wir einfach von definierbaren Mengen und meinen damit definierbar in irgendeinem O-minimalen System.

1.2 Geometrische Kategorien

So wie man in der Riemannschen Geometrie Mannigfaltigkeiten betrachtet, die nicht in einen Euklidischen Raum eingebettet zu sein brauchen, sondern abstrakt definiert sind, kann man auch abstrakt stratifizierte Räume untersuchen. In dieser Allgemeinheit läßt sich jedoch wenig sagen über die innere Geometrie, beispielsweise kann das Volumen unendlich werden, der innere Abstand ist nicht wohldefiniert und die Dichte braucht nicht zu existieren. Aus diesen Gründen arbeiten wir in einem einfacheren Rahmen, der Theorie der Geometrischen Kategorien. Sie erlaubt es, die Theorie von einer Einbettung in einen Euklidischen Raum zu befreien und gleichzeitig alle gewünschten Eigenschaften zu erhalten. Deswegen stellt sie einen natürlichen Rahmen für unsere Untersuchungen dar. Wichtig ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, daß die betrachteten Mengen (sogenannte \mathcal{C} -Mengen) und Mannigfaltigkeiten im Gegensatz zu definierbaren Mengen noch keine natürliche Metrik tragen,

sondern diese erst durch Angabe einer Riemannschen Metrik auf der umgebenden Mannigfaltigkeit definiert sind. Das eröffnet interessante neue Fragestellungen, beispielsweise ob eine gegebene \mathcal{C} -Menge eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung trägt.

Zunächst werden wir in diesem Abschnitt Geometrische Kategorien definieren und einige Beispiele geben. Anschließend beschreiben wir den für uns wichtigen Zusammenhang mit o-minimalen Strukturen. Dabei halten wir uns an die Darstellung aus [D-M96], weisen aber auch auf [Sch00] hin, wo die Beziehungen zwischen χ -Systemen, o-minimalen Systemen und Analytisch-Geometrischen Kategorien klar herausgearbeitet werden.

Danach definieren wir die innere Metrik von \mathcal{C} -Mengen. Die Haupttheoreme des ersten Teils dieser Arbeit werden wir zunächst für o-minimale Mengen formulieren und danach auf Geometrische Kategorien übertragen, wobei der zweite Schritt im Gegensatz zum ersten recht einfach ist.

Definition 1.2. *Eine Analytisch-Geometrische Kategorie ist eine Menge \mathcal{C} bestehend aus Paaren (M, S) mit folgenden Eigenschaften:*

- a) *M ist eine (reell analytische) Mannigfaltigkeit und S eine Teilmenge von M .*
- b) *Für ein festes M ist die Menge der $S \subseteq M$ mit $(M, S) \in \mathcal{C}$ eine Boolesche Algebra, die M enthält. Wir bezeichnen sie auch mit $\mathcal{C}(M)$.*
- c) *Aus $(M, S) \in \mathcal{C}$ folgt $(M \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R}) \in \mathcal{C}$*
- d) *Ist $f : M \mapsto N$ eine eigentliche analytische Abbildung und $(M, S) \in \mathcal{C}$, dann ist $(N, f(S)) \in \mathcal{C}$.*
- e) *Ist S eine Teilmenge von M , (U_i) eine offene Überdeckung von M , dann ist $(M, S) \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn $(U_i, S \cap U_i) \in \mathcal{C}$ für jedes i .*
- f) *Die beschränkten Mengen in $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ sind genau die endlichen Vereinigungen von beschränkten Intervallen und Punkten.*

Beispiel: Die kleinste analytisch-geometrische Kategorie besteht aus den sub-analytischen Teilmengen von Mannigfaltigkeiten. Weitere Beispiele werden sich aus dem nachfolgenden Theorem ergeben.

1.2.1 Korrespondenz zwischen Analytisch-Geometrischen Kategorien und o-minimalen Strukturen

Ist eine Analytisch-Geometrische Kategorie \mathcal{C} gegeben, so definiert man eine o-minimale Struktur $\sigma := \sigma(\mathcal{C})$ durch

$$\sigma_n := \{X \subseteq \mathbb{R}^n : X \in \mathcal{C}(P^n(\mathbb{R}))\}$$

Dabei faßt man \mathbb{R}^n als offene Teilmenge von $P^n(\mathbb{R})$ auf, indem man $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $(1 : y_1 : \dots : y_n) \in P^n(\mathbb{R})$ identifiziert.

Speziell liegen alle beschränkten Mengen aus $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ in σ_n .

Umgekehrt sei nun eine o-minimale Struktur σ über \mathbb{R}_{an} gegeben, d.h. eine o-minimale Struktur, die die global subanalytischen Mengen enthält.

Dann definiert man eine Analytisch-Geometrische Kategorie $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\sigma)$, und zwar ist $S \in \mathcal{C}(M^n)$ genau dann, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x in M gibt, eine offene Menge $V \in \mathbb{R}^n$ sowie einen analytischen Isomorphismus $h : U \rightarrow V$, so daß $h(U \cap S) \in \sigma_n$ gilt.

Theorem 1.3. (van den Dries, Miller)

a) Die beiden Operationen sind wohldefiniert, d.h. für eine Analytisch-Geometrische Kategorie \mathcal{C} ist $\sigma(\mathcal{C})$ eine o-minimale Struktur über \mathbb{R}_{an} und für eine o-minimale Struktur σ über \mathbb{R}_{an} ist $\mathcal{C}(\sigma)$ eine Analytisch-Geometrische Kategorie.

b) Die beiden Operationen sind invers zueinander.

Den Beweis dieses Theorems sowie viele interessante Sätze und Eigenschaften von Analytisch-Geometrischen Kategorien kann man in [D-M96] nachlesen.

1.3 Zahme Stratifikationen und Definition der Skalarkrümmung

Jetzt wollen wir zahme Stratifikationen und Verdier-Stratifikationen definieren. Zahme Stratifikationen brauchen wir, um die Lipschitz-Killing-Maße überhaupt zu definieren. Verdier-Stratifikationen werden beim Beweis des Haupttheorems über Räume mit nach oben beschränkter Krümmung eine wesentliche Rolle spielen. Was Stratifikationen sind und was man damit machen kann, kann beispielsweise in [G-M88], [Ku99] oder [TaLe98] nachgelesen werden. Dort werden auch Whitney-Stratifikationen definiert, wir gehen deshalb hier nicht weiter auf sie ein, obwohl wir sie oft benutzt werden.

Definition 1.4. Sei $S = \cup X^i \subset \mathbb{R}^n$ eine definierbare Stratifikation der kompakten definierbaren Menge S . Dann nennen wir sie eine **Verdier-Stratifikation**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt ist: Für jedes Paar von Straten X^i, X^j mit $X^i \subset \overline{X^j} \setminus X^j$ und jeden Punkt $P \in X^i$ gibt es eine Konstante $C > 0$ und eine Umgebung U von P in \mathbb{R}^n , so daß

$$\delta(T_y X^i, T_x X^j) \leq C \|x - y\|, \quad x \in X^j \cap U, y \in X^i \cap U$$

gilt. Dabei ist δ der Abstand von Vektorräumen, definiert durch

$$\delta(T, T') = \sup_{v \in T, \|v\|=1} d(v, T')$$

Das Hauptresultat von [TaLe98] besagt, daß jede definierbare Menge eine Verdier-Stratifikation besitzt. Wir können deshalb im folgenden mit Verdier-stratifizierten Mengen arbeiten, was zusätzliche Informationen über die Tangentialräume liefert.

In [Ku99] wird bewiesen, daß definierbare Mengen sogenannte zahme Whitney-Stratifikationen besitzen. Diese spielen in der Integralgeometrie eine große Rolle, denn sie machen einen Zugang via stratifizierter Morsetheorie möglich.

Definition 1.5. *Wir nennen eine Whitney-Stratifikation $X = \cup X^i \subset \mathbb{R}^n$ einer kompakten definierbaren Menge **zahm**, wenn es eine Whitney-Stratifikation $\cup N^\mu$ des Einheitsnormalenraumes $\text{Nor}_e X \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ gibt, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

- a) $\{N^\mu\}$ ist mit den Mengen $\text{Nor}_e T_{X^i} X^j, X^i \subset \overline{X^j}$ kompatibel.
- b) Die Projektion $\pi : \text{Nor}_e X \mapsto X, (x, v_e) \mapsto x$ ist stratenweise submersiv.

Diese Definition stammt aus [Ku99]. Dort werden allgemeinere, nicht notwendigerweise definierbare Mengen betrachtet, die ebenfalls zahme Stratifikationen besitzen. Man kann auf diesen Mengen vernünftig Integralgeometrie betreiben und Volumenwachstumsformeln sowie kinematische Formeln beweisen. Der springende Punkt ist die Tatsache, daß man bei zahmen Stratifikationen stratifizierte Morsetheorie anwenden kann (d.h. es gibt genügend viele Morsefunktionen) und auf diese Weise die Lipschitz-Killing-Krümmungen definieren kann. Diese hängen dann nicht von der gewählten Stratifikation ab.

Wir skizzieren die Definition der Lipschitz-Killing-Krümmungen und verweisen auf [Ku99] für viele weitere Eigenschaften und Sätze. Übrigens gibt es einen anderen Zugang zu Lipschitz-Killing-Krümmungen, der von Fu ([Fu94]) gefunden wurde. Er benutzt normale Zyklen und Geometrische Maßtheorie.

Zuerst definieren wir einen Index β :

Definition 1.6. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte definierbare Menge mit zahmer Stratifikation $X = \cup X^i$. Sei $(x, v) \in \text{Nor} X$. Wir setzen*

$$\beta(x, v) := 1 - \chi(O_{\delta, \theta}(x, v) \cap X), \quad 0 < \delta \ll \theta \ll 1$$

wobei

$$O_{\delta, \theta}(x, v) := \left\{ x + w \mid \angle(v, w) \leq \frac{\pi}{2} - \theta, \left\langle w, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \delta \tan \theta \right\}$$

Der Index $\hat{\beta}(x, v)$ wird analog definiert, nur daß jetzt statt $O_{\delta, \theta}(x, v)$ die Menge

$$\hat{O}_{\delta, \theta}(x, v) := \left\{ x + w \mid \angle(v, w) \leq \frac{\pi}{2} - \theta, \|w\| = \frac{\delta}{\cos \theta} \right\}$$

verwendet wird.

Bemerkung:

- In [Ku99] wird mit dem Index β gerechnet, um die Lipschitz-Killing-Krümmungen zu definieren. Berechnungen mit $\hat{\beta}$ sind manchmal einfacher und bei zahmen Stratifikationen stimmen beide Indizes fast überall überein, so daß wir hier eher mit letzterem Index rechnen.
- Die Motivation, den Index so zu definieren, kommt von der stratifizierten Morsetheorie. Wir können β interpretieren als normalen Morseindex der Höhenfunktion in Richtung $-v$ (siehe [Ku99]).
- Die Abbildung $E : \text{Nor } X \mapsto \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto x + v$ kann benutzt werden, um eine Volumenform $d \text{Vol}_{\text{Nor } X} := E^* d \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}$ auf $\text{Nor } X$ durch Zurückziehen zu definieren. Wir bezeichnen mit $Tub_r(X, B)$ die Menge der Normalenvektoren mit Fußpunkt in der Borelmenge $B \subseteq X$ und Länge kleiner oder gleich r .

Definition und Satz 1.7. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben ist*

$$\text{Vol}_\beta Tub_r(X, B) := \int_{Tub_r(X, B)} \beta(x, v) d \text{Vol}_{\text{Nor } X}(x, v)$$

wohldefiniert und liefert ein Polynom in r :

$$\text{Vol}_\beta Tub_r(X, B) =: \sum_{k=0}^n b_k \Lambda_{n-k}(X, B) r^k$$

*Die signierten Maße $\Lambda_i(X, -)$ heißen **Lipschitz-Killing-Krümmungen** von X und sind unabhängig von der gewählten Stratifikation.*

Wenn die Dimension von X genau m beträgt, so verschwindet $\Lambda_k(X, -)$ identisch für $k > m$, $\Lambda_m(X, -)$ ist das m -dimensionale Volumenmaß, $\Lambda_0(X, -)$ das Analogon der Chern-Gauß-Bonnet-Form. Wir beschäftigen uns nur mit $\Lambda_{m-2}(X, -)$, welches die Rolle einer Skalarkrümmung spielt. Das gilt sogar dann, wenn der Raum in keiner Weise glatt ist. Dieses Maß verschwindet auf Straten der Dimension kleiner als $m - 2$. Auf Straten der Dimensionen $m - 2$, $m - 1$ bzw. m ist es jeweils stetig bezüglich der kanonischen Volumenmaße.

Definition 1.8. *Sei S eine kompakte definierbare Menge der Dimension m . Dann nennen wir das signierte Maß*

$$\text{scal}(S, -) := 4\pi \Lambda_{m-2}(S, -)$$

*die **Skalarkrümmung** von S .*

Bemerkung: Der Name *Skalarkrümmung* wird auf vielfältige Weise gerechtfertigt werden. Ist S zufälligerweise eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so liefert dieses Maß nichts anderes als das Integral über die gewöhnliche Skalarkrümmung. Weiterhin gelten analoge Sätze wie im glatten Fall: Ist die Schnittkrümmung positiv oder negativ, so gilt das auch für die Skalarkrümmung. Diese Sätze werden wir im folgenden beweisen. Zuvor müssen wir die Skalarkrümmung umrechnen auf geometrische Größen.

1.4 Berechnung der Skalarkrümmung

In diesem Abschnitt sei eine kompakte definierbare Menge S und eine feste zahme Stratifikation $S = \cup_i X^i$ gegeben. Dabei sind die X^i jeweils Straten der Dimension i . Da es normalerweise mehrere Straten einer Dimension gibt, müßten wir konsequenterweise einen zweiten Index einführen, um sie zu unterscheiden. Das würde die Notation jedoch nur komplizierter als nötig machen. Wir sagen also im folgenden Dinge wie: „Sei X^i ein Stratum der Dimension i “, und meinen damit irgendeins der i -dimensionalen Straten.

1.4.1 Skalarkrümmung auf m -Straten

Wir führen hier eine Rechnung durch, deren Ergebnis schon Hermann Weyl bekannt war. Sie dient als Aufwärmübung für die schwierigeren Berechnungen bei niederdimensionalen Straten.

Aus der allgemeinen Theorie der Lipschitz-Killing-Krümmungen zahmer Mengen [Ku99] wissen wir, daß es eine meßbare Funktion h gibt, so daß für alle Borelmengen $U \subset X^m$ die Gleichung

$$\Lambda_{m-2}(S, U) = \int_U h(x) d \text{vol}_m$$

gilt. Unser Ziel ist es, h bestimmen.

Sei $x_0 \in X^m$ und U eine genügend kleine Umgebung von x_0 in X^m . Wir wählen Koordinaten $\phi : \mathbb{R}^m \supset V \mapsto U \subset X^m$, $(\xi_1, \dots, \xi_m) \mapsto \phi(\xi_1, \dots, \xi_m)$ einer Umgebung von x_0 , so daß die Vektoren $\partial_i := \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes $T_{x_0} X^m$ bilden. Dann gilt $d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_m(x) = g(x) d \text{vol}_m$, wobei g eine glatte Funktion mit $g(x_0) = 1$ ist. Weiterhin wählen wir eine differenzierbare Familie von Normalenvektorfeldern v_1, \dots, v_{n-m} , die in jedem Punkt einer Umgebung von x_0 ein Orthonormalsystem des Normalenraumes bilden. Die Orientierung sei so gewählt, daß $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}, v_1, \dots, v_{n-m} \right\}$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n darstellt.

Um die Notation einfach zu halten, setzen wir $dy := dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-m}$ und $d\xi := d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_m$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} H &: B^{n-m}(r) \times V \mapsto \mathbb{R}^n \\ H(y_1, \dots, y_{n-m}, \xi_1, \dots, \xi_m) &= \phi(\xi_1, \dots, \xi_m) + y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_{n-m} v_{n-m} \\ v &:= y_1 v_1 + \dots + y_{n-m} v_{n-m} \end{aligned}$$

Das Bild von H ist die Menge der Normalenvektoren mit Fußpunkt in U und Länge kleiner oder gleich r . Es folgt

$$\text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U) = \int_{V \times B^{n-m}(r)} \det(DH) \beta(x, v) dy \wedge d\xi$$

Wir wissen weiterhin daß $\beta(x, v) = 1$ für jedes $x \in U$ und alle $v \in T_x^\perp S$ gilt. Die ganze Information steckt also in der Determinante $\det(DH)$. Uns interessiert nur der Koeffizient vor r^{n-m+2} .

Ausgewertet im Punkt x_0 liefert die obige Gleichung

$$\begin{aligned} & b_{n-m+2} h(x_0) r^{n-m+2} \\ &= \int_{B(r)} \sum_{i < j; l, k} \det \left(v_1, \dots, v_{n-m}, \partial_1, \dots, y_l \frac{\partial v_l}{\partial \xi_i}, \dots, y_k \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j}, \dots, \partial_m \right) dy \end{aligned}$$

Wir zerlegen den Vektor $\frac{\partial v_l}{\partial \xi_i}$ entsprechend der Projektion auf den Tangentialraum $T_{x_0} X^m$ in einen orthogonalen und einen tangentialen Anteil:

$$\frac{\partial v_l}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial v_l}{\partial \xi_i} \right)^\perp + \left(\frac{\partial v_l}{\partial \xi_i} \right)^\top$$

Nur der zweite Term trägt etwas zur Determinante bei, da der erste eine Linearkombination der Normalenvektoren v_i ist.

Bezeichnet man mit l_{v_l} die zweite Fundamentalform in Richtung v_l (siehe [Jost98], Abschnitt 3.6.), so gilt

$$\left(\frac{\partial v_l}{\partial \xi_i} \right)^\top = \sum_p l_{v_l}(\partial_i, \partial_p) \partial_p$$

Analog haben wir

$$\left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} \right)^\top = \sum_q l_{v_k}(\partial_j, \partial_q) \partial_q$$

Wir setzen das in die Determinante ein und sehen, daß nur dann ein Beitrag vorliegt, wenn $p = i, j$ und $q = i, j$. Also gilt

$$\begin{aligned}
& b_{n-m+2} h(x_0) r^{n-m+2} \\
&= \int_{B(r)} \left\{ \sum_{i < j; l, k} \det(v_1, \dots, v_{n-m}, \partial_1, \dots, y_l l_{v_l}(\partial_i, \partial_i) \partial_i, \dots, y_k l_{v_k}(\partial_j, \partial_j) \partial_j, \dots, \partial_m) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i < j; l, k} \det(v_1, \dots, v_{n-m}, \partial_1, \dots, y_l l_{v_l}(\partial_i, \partial_j) \partial_j, \dots, y_k l_{v_k}(\partial_j, \partial_i) \partial_i, \dots, \partial_m) \right\} dy \\
&= \sum_{i < j; l, k} \int_{B(r)} y_l y_k (l_{v_l}(\partial_i, \partial_i) l_{v_k}(\partial_j, \partial_j) - l_{v_l}(\partial_i, \partial_j) l_{v_k}(\partial_j, \partial_i)) dy
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen verschwindet das letzte Integral für $l \neq k$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& b_{n-m+2} h(x_0) r^{n-m+2} \\
&= \sum_{i < j} \sum_l \int_{B(r)} y_l^2 (l_{v_l}(\partial_i, \partial_i) l_{v_l}(\partial_j, \partial_j) - l_{v_l}(\partial_i, \partial_j) l_{v_l}(\partial_j, \partial_i)) dy \\
&\stackrel{(*)}{=} C_{n,m} r^{n-m+2} \sum_{i < j} \langle R(\partial_j, \partial_i) \partial_i, \partial_j \rangle \\
&= C_{n,m} r^{n-m+2} \sum_{i < j} K(\partial_i, \partial_j) \\
&= C_{n,m} r^{n-m+2} \frac{1}{2} s(x_0)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (*) folgt aus der Gauss-Gleichung (siehe [Jost98], Theorem 3.6.2.). Die Konstante $C_{n,m}$ kann einfach berechnet werden, es ist

$$C_{n,m} = \int_{B_1^n} y_l^2 dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-m} = \frac{b_{n-m+2}}{2\pi}$$

Daraus folgt

$$h(x_0) = \frac{1}{4\pi} s(x_0)$$

Damit haben wir bewiesen:

Lemma 1.9. *Für jede Borelmenge U , die in X^m enthalten ist, gilt*

$$\Lambda_{m-2}(S, U) = \frac{1}{4\pi} \int_U s(x) d \text{vol}_m(x)$$

1.4.2 Skalkrmmung auf $m - 1$ -Straten

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß wir ein $m - 1$ -Stratum X^{m-1} vorliegen haben, welches auf dem Rand von genau zwei m -dimensionalen Straten X_1^m, X_2^m liegt. Gibt es mehr solcher Straten oder nur eins davon, so kann man in der Rechnung leichte Modifikationen vornehmen und bekommt ähnliche Formeln.

Wir fixieren einen Punkt x_0 auf dem Stratum X^{m-1} . Der Normalenschnitt $(T_{x_0}X^{m-1})^\perp \cap S$ ist lokal die Vereinigung zweier eindimensionaler Kurven. Da diese definierbar sind, haben sie in x_0 wohldefinierte Tangentenrichtungen $w_1(x_0)$ und $w_2(x_0)$. Als Funktion von x_0 betrachtet sind w_1 und w_2 ebenfalls definierbar und damit $d \text{vol}_{m-1}$ - fast überall differenzierbar.

Aus der Theorie von Bröcker-Kuppe folgt, daß Λ_{m-2} ein stetiges Maß auf X^{m-1} darstellt. Das bedeutet, daß es eine meßbare Funktion h gibt, so daß für alle Borelmengen $U \subset X^{m-1}$

$$\Lambda_{m-2}(S, U) = \int_U h(x) d \text{vol}_{m-1}$$

gilt.

Unser Ziel ist es, $h(x_0)$ für jeden Punkt x_0 auszurechnen, für den w_1 und w_2 differenzierbar sind in einer Umgebung von x_0 . Setze wieder $dy := dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-m+1}$ und $d\xi := d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{m-1}$.

Für eine Umgebung U von x_0 in X^{m-1} wählen wir ein Koordinatensystem $\phi : \mathbb{R}^{m-1} \supset V \mapsto U \subset X^{m-1}$, $(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \mapsto \phi(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$, so daß die Tangentenvektoren $\partial_i := \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}$ eine Orthonormalbasis in x_0 bilden. Dann ist in einer Umgebung von x_0 $d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{m-1}(x) = g(x) d \text{vol}_{m-1}(x)$ mit einer stetigen Funktion g für die $g(x_0) = 1$ gilt.

Weiterhin wählen wir wieder differenzierbar variierende Normalenvektoren v_1, \dots, v_{n-m+1} , die in jedem Punkt einer Umgebung von x_0 eine Orthonormalbasis des Normalenraumes bilden. Wir können die Vektoren so umnummerieren, daß $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}, v_1, \dots, v_{n-m+1} \right\}$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n ist.

Da w_i in den Normalenrumen liegt, gibt es Funktionen $c_j^{(i)}$ mit

$$w_i = \sum_{j=1}^{n-m+1} c_j^{(i)} v_j$$

Wir definieren eine Funktion H durch:

$$\begin{aligned}
H &: B^{n-m+1}(r) \times V \mapsto \mathbb{R}^n \\
H &(y_1, \dots, y_{n-m+1}, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \\
&:= \phi(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) + y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_{n-m+1} v_{n-m+1} \\
v &:= y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_{n-m+1} v_{n-m+1}
\end{aligned}$$

Das Bild besteht wieder aus all jenen Normalenvektoren mit Länge $\leq r$, deren Fußpunkt in U liegt. Es gilt also

$$\text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U) = \int_{V \times B^{n-m+1}(r)} \det(DH) \beta(x, v) dy \wedge d\xi$$

Die Determinante kann wie folgt berechnet werden:

$$\det(DH) = \det \left(v_1, \dots, v_{n-m+1}, \partial_1 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \dots, \partial_2 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \dots, \dots \right)$$

Die Vektoren w_i definieren zwei Hemisphären H_1, H_2 auf der Sphäre S^{n-m} . Sei v_e der Einheitsvektor in Richtung v , dann ist $\beta(x, v) = \beta(x, v_e) = 1 - 1_{H_1}(v_e) - 1_{H_2}(v_e)$. Diese Gleichung folgt leicht aus der Tatsache, daß β gleich dem normalen Morseindex von h_{-v_e} in x_0 ist. (siehe [Ku99], Prop. 5.2.14.)

Eine simple Integration zeigt

$$\int_{B^{n-m+1}(r)} (y_1, \dots, y_{n-m+1}) dy = (0, \dots, 0)$$

$$\int_{B^{n-m+1}(r)} 1_{H_1}(y_e) (y_1, \dots, y_{n-m+1}) dy = C_{n,m} r^{n-m+2} (c_1^1, \dots, c_{n-1}^1)$$

$$\int_{B^{n-m+1}(r)} 1_{H_2}(y_e) (y_1, \dots, y_{n-m+1}) dy = C_{n,m} r^{n-m+2} (c_1^2, \dots, c_{n-1}^2)$$

Die Konstante $C_{n,m}$ ist gegeben durch

$$C_{n,m} = \frac{b_{n-m}}{n-m+2} = \frac{b_{n-m+2}}{2\pi}$$

Jetzt haben wir alle Elemente beisammen, um das Tubenvolumen auszudrücken:

$$\begin{aligned}
& \text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U) \\
&= \int_V \int_{B^{n-m+1}(r)} \det \left(v_1, \dots, v_{n-m+1}, \partial_1 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \dots, \partial_2 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \dots, \dots \right) \\
& \hspace{20em} \beta(x, v) dy d\xi \\
& b_{n-m+2} \Lambda_{m-2}(S, U) = \text{coeff}_{n-m+2}(\text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U))
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, daß wir die Determinante ausmultiplizieren und als Summe von Determinanten schreiben können. Deren i -te Spalte ist für $i = 1, \dots, n - m + 1$ durch den Vektor v_i gegeben. Die Spalte an der Stelle $n - m + 1 + i$ ist für $i = 1, \dots, m - 1$ entweder durch ∂_i oder durch einen der Vektoren $y_j \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i}$, $j = 1, \dots, n - m + 1$ gegeben. Nur die Terme mit genau einer Spalte der zweiten Form tragen etwas zum Koeffizienten vor r^{n-m+2} bei. Das liefert

$$\begin{aligned}
& b_{n-m+2} \Lambda_{m-2}(S, U) r^{n-m+2} \\
&= \int_V \int_{B^{n-m+1}(r)} \sum_{\substack{i=1, \dots, m-1 \\ j=1, \dots, n-m+1}} \det \left(v_1, \dots, v_{n-m+1}, \partial_1, \dots, y_j \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i}, \dots, \partial_{m-1} \right) \\
& \hspace{20em} \beta(x, v) dy \wedge d\xi
\end{aligned}$$

Im Punkt x_0 ergibt sich aus dieser Gleichung:

$$\begin{aligned}
& b_{n-m+2} h(x_0) r^{n-m+2} \\
&= \int_{B^{n-m+1}(r)} \sum_{\substack{i=1, \dots, m-1 \\ j=1, \dots, n-m+1}} \det \left(v_1, \dots, v_{n-m+1}, \partial_1, \dots, y_j \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i}, \dots, \partial_{m-1} \right) \\
& \hspace{20em} \beta(x_0, v) dy \\
&= \sum_{\substack{i=1, \dots, m-1 \\ j=1, \dots, n-m+1}} \left(\int_{B^{n-m+1}(r)} \left\langle \partial_i, y_j \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i} \right\rangle \beta(x_0, v) dy \right)
\end{aligned}$$

Da v_j ein Normalenvektor ist, gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}, v_j \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i^2}, v_j \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}, \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i} \right\rangle$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
& b_{n-m+2} h(x_0) r^{n-m+2} \\
&= - \sum_{i=1, \dots, m-1} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i^2}, \sum_{j=1, \dots, n-m+1} v_j \int_{B^{n-m+1}(r)} y_j \beta(x_0, v) dy \right\rangle
\end{aligned}$$

Weiter oben haben wir folgende Gleichung gezeigt:

$$\int_{B^{n-m+1}(r)} y_j \beta(x_0, v) dy = -C_{n,m} r^{n-m+2} (c_j^1 + c_j^2)$$

Das setzen wir in den obigen Ausdruck ein und erhalten

$$\begin{aligned}
b_{n-m+2} h(x_0) &= \sum_{i=1, \dots, m-1} \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i^2}, \sum_{j=1, \dots, n-m+1} v_j C_{n,m} (c_j^1 + c_j^2) \right\rangle \\
h(x_0) &= \frac{1}{2\pi} (\text{tr } II_{w_1} + \text{tr } II_{w_2})
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet II_{w_1} bzw. II_{w_2} die zweite Fundamentalform von X^{m-1} in Richtung w_1 bzw. w_2 .

1.4.3 Skalkrmmung auf $m - 2$ -Straten

Das nächste Ziel ist es, $\Lambda_{m-2}|_{X^{m-2}}$ zu bestimmen. Wir gehen wieder so vor wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten. Wieder gibt es eine meßbare Funktion h , so daß für alle Borelmengen $U \subset X^{m-2}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\Lambda_{m-2}(S, U) = \int_U h(x) d \text{vol}_{m-2}(x)$$

Um h zu berechnen, halten wir einen Punkt $x_0 \in X^{m-2}$ und eine kleine Umgebung U von x_0 in X^{m-2} fest, wählen ein lokales Koordinatensystem $\phi : \mathbb{R}^{m-2} \supset V \mapsto U \subset X^{m-2}$, $(\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \mapsto \phi(\xi_1, \dots, \xi_{m-2})$ so daß die Tangentenvektoren $\partial_i := \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}$ eine Orthonormalbasis in x_0 bilden. Dann folgt

$d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{m-2}(x) = g(x) d\text{vol}_{m-2}(x)$ wobei g eine stetige Funktion mit $g(x_0) = 1$ ist.

Wie schon bei den anderen Stratendimensionen wählen wir differenzierbar variierende Normalenvektoren v_1, \dots, v_{n-m+2} , die in jedem Punkt einer Umgebung von x_0 eine Orthonormalbasis des Normalenraumes bilden. Die Numerierung sei so gewählt, daß $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}, v_1, \dots, v_{n-m+2} \right\}$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n bildet.

Wir setzen $dy := dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-m+2}$ und $d\xi := d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{m-2}$.

Die Funktion H sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} H &: B^{n-m+2}(r) \times V \mapsto \mathbb{R}^n \\ H &(y_1, \dots, y_{n-m+2}, \xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \\ &:= \phi(\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) + y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_{n-m+2} v_{n-m+2} \\ v &:= y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_{n-m+2} v_{n-m+2} \end{aligned}$$

Das Bild unter H besteht aus den Normalenvektoren der Länge $\leq r$, deren Fußpunkt in U liegt. Also ist

$$\text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U) = \int_{V \times B^{n-m+2}(r)} \det(DH) \beta(x, v) dy \wedge d\xi$$

Die Determinante beträgt

$$\det(DH) = \det \left(v_1, \dots, v_{n-m+2}, \partial_1 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \dots, \partial_2 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \dots, \dots \right)$$

Das bedeutet für das Tubenvolumen

$$\begin{aligned} &\text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U) \\ &= \int_V \int_{B^{n-m+2}(r)} \det \left(v_1, \dots, v_{n-m+2}, \partial_1 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \dots, \partial_2 + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \dots, \dots \right) \\ &\quad \beta(x, v) dy d\xi \end{aligned}$$

Nach Definition von Λ_{m-2} gilt

$$b_{n-m+2} \Lambda_{m-2}(S, U) = \text{coeff}_{n-m+2}(\text{vol}_\beta \text{Tub}_r(S, U))$$

Multipliziert man die Determinante aus, findet man eine Summe von Determinanten mit $0, 1, \dots$, oder $n - m + 1$ Spalten der Form $y_j \frac{\partial v_j}{\partial \xi_k}$. Nur wenn keine solche Spalte vorkommt, gibt es einen Beitrag zum Koeffizienten vor r^{n-m+2} . Es gilt also

$$b_{n-m+2} \Lambda_{m-2}(U) r^{n-m+2} = \int_V \int_{B^{n-m+2}(r)} \det(v_1, \dots, v_{n-m+2}, \partial_1, \dots, \partial_{m-2}) \beta(x, v) dy d\xi$$

Für den Punkt x_0 liefert diese Gleichung

$$\begin{aligned} & b_{n-m+2} h(x_0) r^{n-m+2} \\ &= \int_{B^{n-m+2}(r)} \det(v_1, \dots, v_{n-m+2}, \partial_1, \dots, \partial_{m-2}) \beta(x_0, v) dy \\ &= \int_{B^{n-m+2}(r)} \beta(x_0, v) dy \end{aligned}$$

Aus [Ku99], Kap. 6 wissen wir, daß $\beta(x_0, v)$ gleich dem normalen Morseindex ist. Letzterer ist trivialerweise gleich dem Index $\beta(x_0, v)$ des Normalenschnittes $(T_{x_0} X^{m-2})^\perp \cap X$. Das ist eine zweidimensionale definierbare Menge. Mit den gleichen Berechnungen wie oben sieht man, daß

$$b_{n-m+2} \Lambda_0 \left((T_{x_0} X^{m-2})^\perp \cap S, \{x_0\} \right) r^{n-m+2} = \int_{B^{n-m+2}(r)} \beta(x_0, v) dy$$

Daraus folgt

$$h(x_0) = \Lambda_0 \left((T_{x_0} X^{m-2})^\perp \cap S, \{x_0\} \right)$$

Dieser Ausdruck wird im folgenden Kapitel noch vereinfacht, das Endergebnis steht in Theorem 2.7.

1.5 Skalkrümmung von \mathcal{C} -Mengen

Wir wählen jetzt eine feste Analytisch-Geometrische Kategorie \mathcal{C} und nennen die Mengen $A \in \mathcal{C}(M)$ einfach \mathcal{C} -Mengen. Die Einbettung in eine Mannigfaltigkeit wird dabei nicht explizit erwähnt, sollte aber nicht vergessen werden.

Wie schon weiter oben angedeutet, tragen \mathcal{C} -Mengen a priori noch keine Metrik. Um geometrische Größen wie die Skalarkrümmung zu definieren, müssen wir also erst mal festlegen, was mit einer Metrik gemeint sein soll.

Definition und Satz 1.10. *Gegeben sei $(M, S) \in \mathcal{C}$ mit S abgeschlossen und zusammenhängend. Dann ist eine Metrik auf S per definitionem eine reell analytische Riemannsche Metrik auf M . Diese induziert eine innere Metrik auf S .*

Bemerkung: Beispielsweise tragen definierbare Mengen immer eine kanonische Metrik, denn sie sind in einen Euklidischen Raum eingebettet, der eine kanonische Metrik trägt.

Beweis des Satzes: Laut [D-M96] kann man S Whitney-stratifizieren. Die Existenz der inneren Metrik folgt dann aus [B-T95], siehe auch [Fer97], Section IV. \square

Wir wollen die Formeln des letzten Abschnittes dazu benutzen, die Skalarkrümmung (als Maß) von \mathcal{C} -Mengen zu definieren.

Sei $S \subset M$ eine kompakte, zusammenhängende \mathcal{C} -Menge der Dimension m , wobei M eine (reell-analytische) Riemannsche Metrik g trägt. Wir stratifizieren S so, daß die Whitneybedingungen erfüllt sind. Auf jedem Stratum induziert g eine Riemannsche Metrik.

Definition 1.11. *Sei S eine zusammenhängende, kompakte \mathcal{C} -Menge der Dimension m mit einer Metrik und einer Whitney-Stratifikation $S = \cup_i X^i$. Dann definieren wir für Borelmengen $U \subseteq S$*

$$\begin{aligned} \text{scal}(S, U) &= \int_{U \cap X^m} s(x) d \text{vol}_m(x) \\ &+ 2 \int_{U \cap X^{m-1}} \left(\sum_{i=1}^k \text{tr} II_{w_i} \right) d \text{vol}_{m-1}(x) \\ &+ 4\pi \int_{U \cap X^{m-2}} \left(\frac{1}{2} + (-1)^m \frac{\chi_{\text{lok}}(S, x)}{2} - \theta_m(S, x) \right) d \text{vol}_{m-2}(x) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen w_1, w_2, \dots, w_k die Normalenvektoren von X^{m-1} in Richtung der höchstdimensionalen Straten und II_{w_i} steht für die symmetrische Bilinearform (2. Fundamentalform) $II_{w_i}(X, Y) := -\langle \nabla_X w_i, Y \rangle$ auf X^{m-1} . Der Term $\theta_m(S, x)$ bezeichnet die m -dimensionale Dichte von S im Punkt x , siehe Kapitel 2.

Bemerkungen:

- Das Skalarkrümmungsmaß ist unabhängig von der Stratifikation.

- Die Dichte ist in allen Punkten wohldefiniert, denn laut einer lokalen Version des Satzes von Nash ([Jan26],[Gro86]) findet man zu jedem Punkt $P \in M$ eine Umgebung U von P und eine analytische, isometrische Einbettung von $M \cap U$ in einen Euklidischen Raum. Wegen der Analytizität geht $S \cap U$ in eine definierbare Menge über. Für definierbare Mengen existiert die Dichte nach [K-R89]. Man beachte dabei, daß für isometrische Einbettungen $S \subset M \subset \mathbb{R}^q$ die Metriken von \mathbb{R}^q , M und S in der Nähe eines festen Punktes asymptotisch äquivalent sind (siehe dazu auch Satz 2.4).
- Die Existenz der Normalenvektoren sieht man auf die gleiche Weise.
- Die Motivation dieser Definition ergibt sich aus Theorem 2.7. Ist M eine in einen Euklidischen Raum eingebettete Mannigfaltigkeit, so stimmen die beiden Definitionen 1.8 und 1.11 überein.
- Ist $f : M \mapsto N$ eine Isometrie, so stimmen die Skalarkrümmungen von S und $f(S)$ überein. Das folgt trivialerweise aus der obigen Formel, da alle Größen innere Größen der umgebenden Mannigfaltigkeit sind. In Kapitel 5 werden wir diese Aussage noch stark verallgemeinern, indem wir zeigen, daß nicht nur eine Isometrie der umgebenden Mannigfaltigkeiten, sondern schon eine Isometrie der definierbaren Mengen selbst die Skalarkrümmung invariant läßt.

Kapitel 2

Dichte und innere Geometrie definierbarer Mengen

Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, daß bei der Berechnung der Skalar­krümmung von definierbaren Mengen die Dichte des Querschnitts auftritt. Definierbare Mengen haben die schöne Eigenschaft, daß diese Dichte fast überall mit der Dichte der Menge selbst übereinstimmt.

Aus der Whitneybedingung und einem einfachen Argument folgt, daß die Dichte sowohl bezüglich des inneren als auch bezüglich des äußeren Abstandes berechnet werden kann und daß dabei derselbe Wert herauskommt. Dieser sehr einfache Satz schlägt die Brücke zwischen der Skalar­krümmung, die ja über eine Einbettung in den Euklidischen Raum definiert ist, und der inneren Geometrie. Beispielsweise ist bei Alexandrov­räumen viel über Volumina bekannt, aber dabei bezieht man sich natürlich immer auf den inneren Abstand (ein anderer ist ja im allgemeinen gar nicht gegeben).

Im letzten Abschnitt wird ein Reflexionsgesetz bewiesen, welches für den Beweis des Haupttheorems über definierbare Räume mit nach oben beschränkter Krümmung verwendet wird.

2.1 Einige Sätze im zweidimensionalen Fall

Für zweidimensionale definierbare Mengen kann man Λ_0 und damit scal konkret ausrechnen. Diese Rechnung stellt außerdem die Verbindung zwischen zwei verschiedenen Definitionen der Krümmung im zweidimensionalen Fall her.

Lemma 2.1. *Sei $M \subset S^{n-1}$ eine eindimensionale definierbare Teilmenge der $n - 1$ -dimensionalen Einheitssphäre. Dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} \chi(B_r(x) \cap M) dx = a(r)\chi(M) + b(r)l(M)$$

Hierbei bezeichnet $B_r(x)$ einen geodätischen Ball vom Radius r um x , $a(r)$ sein Volumen, $b(r)$ das Volumen einer r -Tube um einen Großkreis, dividiert durch 2π , und $l(M)$ die Länge von M .

Beweis: Das folgt mit leichten Approximationsargumenten. Die Beweisidee ist folgende: man zeigt die Aussage für Punkte und Großkreise, dann für Abschnitte von Geodätischen. Jede Kurve läßt sich dann durch stückweise Geodätische approximieren, und zwar so, daß dabei die Eulercharakteristiken fast überall konvergieren. Dazu muß man Thom's Isotopielemma benutzen. \square

Satz 2.2. Sei M eine zweidimensionale kompakte definierbare Menge, $P \in M$. Dann existiert der Grenzwert $\alpha(M, P) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{l(M \cap S_s(P))}{s}$ und es gilt die folgende Gleichung:

$$\Lambda_0(M, \{P\}) = \frac{1}{2} + \frac{\chi_{lok}}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}$$

Dabei bezeichnet $\chi_{lok} = \chi(M, M \setminus P)$ die lokale Eulercharakteristik von M in P (siehe [B-C-R87], Abschnitt 1.2). Mit l bezeichnen wir die Länge einer eindimensionalen Menge.

Beweis: Wir wählen eine Whitney-Stratifikation, bei der P ein 0-Stratum ist. Da beide Seiten der Gleichung Euler-additiv sind, können wir die Gleichung stratenweise zeigen. Das ist trivial für 1-Straten ($\chi_{lok} = 0$, $\alpha = 0$, $\Lambda_0 = \frac{1}{2}$). Also können wir annehmen, daß M ein 2-Stratum ist, welches in der Nähe von P Whitney's Bedingungen erfüllt.

Dann gilt $\beta(P, v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \beta_{\theta, \delta}(P, v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\beta}_{\theta, \delta}(P, v)$ für fast alle v .

Um $\Lambda_0(M, \{P\})$ zu berechnen, führen wir die gleichen Berechnungen wie im vorigen Abschnitt durch und finden

$$\begin{aligned} \Lambda_0(M, \{P\}) &= \frac{1}{s_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \beta(P, v) dv \\ &= \frac{1}{s_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \beta_{\theta, \delta}(P, v) dv \\ &= \frac{1}{s_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\beta}_{\theta, \delta}(P, v) dv \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{s_{n-1}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S^{n-1}} \hat{\beta}_{\theta, \delta}(P, v) dv \\ &= 1 - \frac{1}{s_{n-1}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(a(r) \chi(S_s \cap M) + b(r) \frac{l(S_s \cap M)}{s} \right) \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber haben wir $r := \frac{\pi}{2} - \theta$ und $s := \frac{\delta}{\cos \theta}$ gesetzt. Gleichung (*) folgt aus Lebesgue's Konvergenztheorem. Da der Index β eine definierbare und somit beschränkte Funktion ist, besitzen alle beteiligten Funktionen

integrierbare Majoranten und wir können dieses Theorem anwenden. Außerdem haben wir Lemma 2.1 benutzt. Die Existenz von β fast überall liefert in Verbindung mit dem Konvergenztheorem die Existenz des Winkels α . Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\Lambda_0(M, \{P\}) &= 1 - \frac{1}{s_{n-1}} \lim_{\theta \rightarrow 0} (a(r)(1 - \chi_{lok}(M, P)) + b(r)\alpha(M, P)) \\ &= 1 - \frac{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}{s_{n-1}}(1 - \chi_{lok}(M, P)) - \frac{b\left(\frac{\pi}{2}\right)}{s_{n-1}}\alpha(M, P) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\chi_{lok}(M, P)}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\end{aligned}$$

□

Wir erinnern daran, daß M eine zweidimensionale definierbare Menge ist und $P \in M$ ein Punkt. Wir haben oben gezeigt, daß der folgende Grenzwert existiert:

$$\alpha_0(M, P) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{l(S_r(P) \cap M)}{r}$$

wobei $l(S_r(P) \cap M)$ die Länge des Schnittes einer Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt P mit M bezeichnet. Wir nennen α_0 den Winkel bei P .

In [K-R89] wird gezeigt, daß auch der folgende Grenzwert existiert:

$$\theta(M, P) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_2(B_r(P) \cap M)}{b_2 r^2}$$

Er heißt **Dichte** von M in P .

Satz 2.3. *Für eine zweidimensionale definierbare Menge M und $P \in M$ stimmen Winkel und Dichte bis auf einen Faktor überein:*

$$\theta(M, P) = \frac{\alpha_0(M, P)}{2\pi}$$

Beweis:

Da sowohl der Winkel als auch die Dichte additiv sind und die Gleichung für 1-Straten trivial ist, reicht es aus, die Gleichung für 2-Straten zu zeigen. Das funktioniert mit einem Standardbeweis, der die Koareaformel und Whitney's Bedingung B benutzt. Wir ersparen uns die technischen Details. □

Bemerkung: Krümmungsmaße für zweidimensionale semialgebraische Mengen sind auch in [B-K-S97] auf scheinbar andere, tatsächlich aber äquivalente Weise definiert. Die Äquivalenz (bis auf einen konstanten Faktor 2π) folgt aus Lemma 1.9, Abschnitt 1.4.2, Satz 2.3 sowie den Formeln aus [B-K-S97].

2.2 Vergleich von innerer und äußerer Dichte

Die Skalarkrümmung haben wir mit Hilfe der Integralgeometrie als Maß definiert. Bei der Berechnung tritt ein Term auf, der mit der äußeren Geometrie in Zusammenhang steht, nämlich die Dichte. Um den Bogen zur inneren Geometrie zu schlagen, benötigen wir die Tatsache, daß sich die Dichte schon als innere Größe definieren läßt. Das ist nicht sehr schwierig, bildet aber die Grundlage für eine Hälfte des Beweises des Haupttheorems über definierbare Alexandrovräume. Aus der allgemeinen Theorie der Alexandrovräume bekommt man Informationen über die innere Dichte, die zum Beweis des Haupttheorems benutzt werden.

Satz 2.4. *Sei S wie immer eine zusammenhängende, definierbare Menge der Dimension m und $P \in S$. Dann gilt:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol } B_i(P, r)}{b_m r^m} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol } B_e(P, r)}{b_m r^m}$$

und beide Grenzwerte existieren. Dabei bezeichnet B_i eine Kugel in S bezüglich des inneren Abstandes und B_e eine Kugel in S bezüglich des äußeren Abstandes.

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $P = 0$ ist.

Gegeben sei eine Stratifikation von S , die den Whitney Bedingungen genügt. Nimm das Einheitsvektorfeld $v(x) = -\text{grad } d_e(\cdot, 0)(x)$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, welches in jedem Punkt $\neq 0$ auf den Ursprung zeigt. Aus Whitney B folgt, daß für $x \in X^j$ der Winkel zwischen $v(x)$ und $T_x X^j$ sehr klein wird, je näher man sich 0 nähert. Wir projizieren v stratenweise auf S . Ist $Q \in B_e(r)$ ein beliebiger Punkt, so können wir eine Integralkurve bezüglich dieses Vektorfeldes konstruieren. Diese verläßt eventuell das Stratum, landet dann aber in einem Stratum niedrigerer Dimension. Da der Abstand zu P in kontrollierter Weise kleiner wird, endet sie letztlich in P . Die Länge der Kurve ist trivialerweise größer als der Euklidische Abstand von Q zu 0. Andererseits ist sie kleiner als $(1 + \epsilon(r))$ mal dem Euklidischen Abstand von Q zu 0, wie leicht aus der Whitneybedingung B folgt. Dabei ist $\epsilon(r)$ eine Funktion, die mit r gegen 0 ebenfalls gegen 0 strebt.

Es folgt

$$B_e\left(P, \frac{r}{1 + \epsilon(r)}\right) \subseteq B_i(P, r) \subseteq B_e(P, r)$$

Wir dividieren alle Terme durch $b_m r^m$. Dann existieren für $r \rightarrow 0$ die Grenzwerte der beiden äußeren Terme der Ungleichung und sind gleich (der Beweis dazu steht in [K-R89]). Also muß auch der Grenzwert des mittleren Terms existieren, das zeigt die Existenz der inneren Dichte. \square

Bemerkung: Es fällt auf, daß wir beim Beweis nur zwei Dinge verwendet haben: die Existenz einer Whitneystratifikation sowie die Existenz der äußeren Dichte. Die Aussage des Satzes ist also immer dann richtig, wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

2.3 Das Produkttheorem für Dichten

Obwohl wir das später nicht benötigen werden, paßt das folgende Theorem recht gut in diese Arbeit.

Zunächst sei daran erinnert, daß für eine definierbare Menge S der Dimension m

$$\theta_n(S, 0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_n(B_r(0) \cap S)}{b_n r^n}$$

die Dichte von S in 0 bezeichnet.

Theorem 2.5. *Seien A und B zwei definierbare Mengen der Dimensionen n bzw. m . Dann gilt*

$$\theta_{n+m}(A \times B, (0, 0)) = \theta_n(A, 0) \theta_m(B, 0)$$

Beweis:

Der Beweis folgt einem ähnlichem Schema wie verschiedene Beweise in [Co98]. Zuerst wird die Aussage für „dicke“ Kegel gezeigt, anschließend für offene Mengen sowie für ϵ -analytische Stücke. Aus der Tatsache, daß man definierbare Mengen in ϵ -analytische Stücke zerlegen kann, folgt schließlich das Theorem.

Schritt 1: Seien im ersten Schritt $A \in \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathbb{R}^m$ Kegel der Dimension n bzw. m . Wir wählen Standardkoordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$ auf \mathbb{R}^n und sphärische Koordinaten (r, x') mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $x' \in S^{n-1}$. Dann ist $dx = r^{n-1} dr dx'$ und es gilt

$$\begin{aligned} \theta_{n+m}(A \times B, (0, 0)) &= \frac{\text{vol}_{n+m}(B_1(0) \cap (A \times B))}{b_{n+m}} \\ &= \frac{1}{b_{m+n}} \int_A \int_B 1_{B_1(0)}(x, y) dy dx \\ &= \frac{1}{b_{m+n}} \int_A \sqrt{1-x^2}^m b_m \theta_m(B, 0) dx \\ &= \frac{b_m}{b_{n+m}} \theta_m(B, 0) \int_{S^{n-1} \cap A} dx' \int_0^1 \sqrt{1-r^2}^m r^{n-1} dr \\ &= C_{n,m} \theta_n(A, 0) \theta_m(B, 0) \end{aligned}$$

wobei

$$C_{n,m} = \frac{b_m s_{n-1}}{b_{n+m}} \int_0^1 \sqrt{1-r^{2^m}} r^{n-1} dr$$

nur von n und m , nicht aber von A und B abhängt.

Um $C_{n,m}$ explizit auszurechnen, kann man $A = \mathbb{R}^n$ und $B = \mathbb{R}^m$ setzen. Es folgt $C_{n,m} = 1$. Also gilt

$$\theta_{n+m}(A \times B, (0,0)) = \theta_n(A,0) \theta_m(B,0)$$

Falls A oder B kleinere Dimensionen haben sollten, so bleibt die Gleichung trotzdem richtig, da dann auf beiden Seiten trivialerweise 0 steht.

Schritt 2: Seien A und B offene definierbare Teilmengen des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m . Die Tangentenkegel von A bzw. B in 0 bezeichnen wir mit $C_0(A)$ bzw. $C_0(B)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \theta_{n+m}(A \times B, (0,0)) &= \theta_{m+n}(C_{(0,0)}(A \times B), (0,0)) \\ &= \theta_{m+n}(C_0(A) \times C_0(B), (0,0)) \\ &= \theta_n(C_0(A), 0) \theta_m(C_0(B), 0) \\ &= \theta_n(A, 0) \theta_m(B, 0) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Tatsache benutzt, daß die Dichte einer offenen Menge gleich der Dichte des Tangentenkegels ist (siehe [K-R89]).

Schritt 3: Sei $\epsilon > 0$ und Γ ein ϵ -analytisches Stück der Dimension k in \mathbb{R}^n . Das bedeutet, daß es einen k -dimensionalen Unterraum E von \mathbb{R}^n , eine offene Teilmenge $U \subset E$ und eine analytische Abbildung $\phi : U \mapsto E^\perp$ gibt, so daß sich Γ schreiben läßt als Graph von ϕ in $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^n$ und so daß $\|D_u \phi\| \leq \epsilon$ für jedes $u \in U$ gilt (siehe [K-R89]).

Analog sei ein zweites ϵ -analytisches Stück Γ' der Dimension k' in \mathbb{R}^m gegeben. Dann ist $\Gamma \times \Gamma' \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ein 2ϵ -analytisches Stück der Dimension $k+k'$, denn es ist der Graph der Abbildung $\phi \times \phi' : E \times E' \supset U \times U' \mapsto E^\perp \times E'^\perp$.

Wir nehmen o.E. an, daß 0 im Abschluß von Γ und Γ' liegt. Aus Schritt 2 und [K-R89], Bemerkung 3 können wir schlußfolgern, daß

$$\begin{aligned} \theta_{k+k'}(\Gamma \times \Gamma', (0,0)) &\leq (1+2\epsilon)^{k+k'} \theta_{k+k'}(U \times U', (0,0)) \\ &= (1+2\epsilon)^{k+k'} \theta_k(U, 0) \theta_{k'}(U', 0) \\ &\leq (1+2\epsilon)^{k+k'} (1+\epsilon)^{k+k'} \theta_k(\Gamma, 0) \theta_{k'}(\Gamma', 0) \end{aligned}$$

Analog haben wir

$$\begin{aligned}
\theta_{k+k'}(\Gamma \times \Gamma', (0, 0)) &\geq (1 + 2\epsilon)^{-k-k'} \theta_{k+k'}(U \times U', (0, 0)) \\
&= (1 + 2\epsilon)^{-k-k'} \theta_k(U, 0) \theta_{k'}(U', 0) \\
&\geq (1 + 2\epsilon)^{-k-k'} (1 + \epsilon)^{-k-k'} \theta_k(\Gamma, 0) \theta_{k'}(\Gamma', 0)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend können wir dafür schreiben:

$$\begin{aligned}
(1 + \psi(\epsilon)) \theta_k(\Gamma, 0) \theta_{k'}(\Gamma', 0) &\geq \theta_{k+k'}(\Gamma \times \Gamma', (0, 0)) \\
&\geq (1 + \psi(\epsilon))^{-1} \theta_k(\Gamma, 0) \theta_{k'}(\Gamma', 0)
\end{aligned}$$

wobei ψ eine Funktion ist, die für $\epsilon \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 geht. Diese Ungleichung bleibt trivialerweise richtig, wenn $0 \notin \bar{\Gamma}$ oder $0 \notin \bar{\Gamma}'$. Beide Seiten verschwinden in diesem Fall.

Schritt 4: Schließlich seien zwei beschränkte definierbare Mengen A und B mit Dimensionen n bzw. m gegeben. Wähle ein $\epsilon > 0$. Nach [K-R89] finden wir eine Zerlegung von A in disjunkte ϵ -analytische Stücke $\Gamma_1^\epsilon, \dots, \Gamma_N^\epsilon$, so daß $\dim(A \setminus \cup_{i=1}^N \Gamma_i^\epsilon) < n$ gilt. Entsprechend gibt es eine Zerlegung von B in endlich viele ϵ -analytische Stücke Δ_j^ϵ mit $\dim(B \setminus \cup_j \Delta_j^\epsilon) < m$. Die Stücke $\Gamma_i^\epsilon \times \Delta_j^\epsilon$ bilden dann eine disjunkte Zerlegung von $A \times B$ (bis auf eine Menge kleinerer Dimension) und mit den obigen Ungleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\theta_{n+m}(A \times B, (0, 0)) &= \sum_{i,j} \theta_{n+m}(\Gamma_i^\epsilon \times \Delta_j^\epsilon, (0, 0)) \\
&\geq (1 + \psi(\epsilon))^{-1} \sum_{i,j} \theta_n(\Gamma_i^\epsilon, 0) \theta_m(\Delta_j^\epsilon, 0) \\
&= (1 + \psi(\epsilon))^{-1} \theta_n(A, 0) \theta_m(B, 0)
\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise finden wir

$$\theta_{n+m}(A \times B, (0, 0)) \leq (1 + \psi(\epsilon)) \theta_n(A, 0) \theta_m(B, 0)$$

Diese Ungleichungen gelten für jedes $\epsilon > 0$. Da $\psi(\epsilon)$ gegen 0 konvergiert, muß die folgende Gleichung gelten:

$$\theta_{n+m}(A \times B, (0, 0)) = \theta_n(A, 0) \theta_m(B, 0)$$

Der Fall, daß A oder B unbeschränkt ist, kann leicht auf den beschränkten Fall zurückgeführt werden, da die Dichte eine lokale Größe ist.

Damit haben wir Theorem 2.5 bewiesen. \square

2.4 Die Querschnittsformel

Theorem 2.6. *Gegeben sei eine kompakte, definierbare, Whitney-stratifizierte Menge S und ein i -Stratum X^i . Dann ist die Dichte in fast jedem Punkt gleich der Dichte des Querschnitts, d.h.*

$$\theta(S, P) = \theta((T_P X^i)^\perp \cap S, P)$$

für $d\text{vol}_i$ -fast jeden Punkt $P \in X^i$.

Beweis:

Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Zunächst folgt aus elementaren Sätzen der Maßtheorie die Aussage für „dicke“ Mengen. Anschließend zeigen wir die Aussage für flache Straten. Die Verallgemeinerung auf beliebige Mengen S erfolgt im dritten Schritt mittels einer Bilipschitzabbildung.

Schritt 1:

Wir nehmen an, daß S eine „dicke“ Menge im \mathbb{R}^n ist, d.h. S ist gleich dem Abschluß des Inneren von S , und daß das Stratum X^i flach ist, d.h. $X^i \subset \mathbb{R}^i$. Wir zerlegen \mathbb{R}^n entsprechend als orthogonale Summe in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^{n-i}$.

Es reicht aus zu zeigen, daß

$$\int_Q \theta(S, P) dP = \int_Q \theta(S \cap (T_P X^i)^\perp, P) dP$$

für jeden Quader $Q = (a_1 - \epsilon_1, a_1 + \epsilon_1) \times \cdots \times (a_i - \epsilon_i, a_i + \epsilon_i) \subset \mathbb{R}^i$ mit $a_1, \dots, a_i \in \mathbb{R}, \epsilon_1 > 0, \dots, \epsilon_i > 0$ gilt.

Wir wählen eine feste reelle Zahl r mit $0 < r < \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_i\}$ und bezeichnen mit $Q_-(r)$ den Quader

$$Q_-(r) = (a_1 - \epsilon_1 + r, a_1 + \epsilon_1 - r) \times \cdots \times (a_i - \epsilon_i + r, a_i + \epsilon_i - r)$$

sowie mit $Q_+(r)$ den Quader

$$Q_+(r) = (a_1 - \epsilon_1 - r, a_1 + \epsilon_1 + r) \times \cdots \times (a_i - \epsilon_i - r, a_i + \epsilon_i + r)$$

Dann ist $Q_-(r) \subset Q \subset Q_+(r)$.

Sei $r > 0$ zunächst eine fest gewählte reelle Zahl.

Dann gilt für $y = (y_0, y_1) \in Q_-(r) \times \mathbb{R}^{n-i}$ mit $|y_1| \leq r$ die folgende Gleichung:

$$\int_Q 1_{B(x,r) \cap S}(y) dx = 1_S(y) b_i \left(\sqrt{r^2 - |y_1|^2} \right)^i$$

Das folgt aus dem Satz von Pythagoras.

In den folgenden Rechnungen finden wir wieder integrierbare Majoranten, entweder wegen der Definiertheit der Funktionen oder wegen der Tatsache, daß offene Mengen im \mathbb{R}^n durch 1 beschränkte Dichten haben. Also können wir die Sätze von Fubini und Lebesgue anwenden. Wir benutzen sphärische Koordinaten für \mathbb{R}^{n-i} und schreiben $y_1 = \bar{r}\phi$ mit $\bar{r} \in [0, \infty)$ und $\phi \in S^{n-i-1}$. Dann ist $dy = \bar{r}^{n-i-1} dy_0 d\bar{r} d\phi$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^n} \int_Q \text{vol } B(x, r) \cap S dx &= \frac{1}{r^n} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n} 1_{B(x,r) \cap S}(y) dy dx \\
&= \frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_Q 1_{B(x,r) \cap S}(y) dx dy \\
&\geq \frac{1}{r^n} \int_{Q_-(r) \times B^{n-i}(r)} \int_Q 1_{B(x,r) \cap S}(y) dx dy \\
&= \frac{1}{r^n} \int_{Q_-(r) \times B^{n-i}(r)} 1_S(y) b_i \left(\sqrt{r^2 - |y_1|^2} \right)^i dy \\
&= \frac{1}{r^n} \int_{Q_-(r)} \int_{(0,r)} \int_{S^{n-i-1}} 1_S(y_0, \bar{r}\phi) b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i \\
&\quad \cdot \bar{r}^{n-i-1} d\phi d\bar{r} dy_0 \\
&= \int_Q \frac{1}{r^n} 1_{Q_-(r)}(y_0) \int_{(0,r)} \int_{S^{n-i-1}} \\
&\quad 1_S(y_0, \bar{r}\phi) b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i \bar{r}^{n-i-1} d\phi d\bar{r} dy_0
\end{aligned}$$

Jetzt lassen wir r gegen 0 gehen. Der Grenzwert kann auf beiden Seiten innerhalb des Integrals geschrieben werden, da es integrierbare Majoranten gibt. Letzteres folgt aus der Tatsache, daß wir offene Mengen im \mathbb{R}^n betrachten und die Volumina von Bällen trivialerweise abgeschätzt werden können.

Es gilt nach Definition

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \text{vol } B(x, r) \cap S = b_n \theta(S, x)$$

Wir setzen für $y_0 \in Q$

$$I(y_0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} 1_{Q_-(r)}(y_0) \int_{(0,r)} \int_{S^{n-i-1}} 1_S(y_0, \bar{r}\phi) b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i \bar{r}^{n-i-1} d\phi d\bar{r}$$

sowie

$$N(y_0) := (T_{y_0} X^i)^\perp$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
I(y_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} 1_{Q_-(r)}(y_0) \int_0^r \int_{S^{n-i-1}} 1_S(y_0, \bar{r}\phi) b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i \bar{r}^{n-i-1} d\phi d\bar{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_0^r \left\{ b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i \bar{r}^{n-i-1} \int_{S^{n-i-1}} 1_S(y_0, \bar{r}\phi) d\phi \right\} d\bar{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_0^r \left\{ b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i \text{vol } N(y_0) \cap S \cap S(\bar{r}) \right\} d\bar{r}
\end{aligned}$$

Setze

$$a(\bar{r}) := b_i \left(\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} \right)^i$$

sowie

$$b(\bar{r}) := \text{vol } N(y_0) \cap S \cap S(\bar{r})$$

$$B(\bar{r}) := \int_0^{\bar{r}} b(s) ds$$

Aus der Koareaformel folgt

$$B(\bar{r}) = \text{vol } N(y_0) \cap S \cap B(\bar{r})$$

und damit

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \frac{B(\bar{r})}{b_{n-i} \bar{r}^{n-i}} = \theta(N(y_0) \cap S, y_0)$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^r a'(\bar{r}) \bar{r}^{n-i} d\bar{r} &= -r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} b_i i (\cos \alpha)^{i-1} (\sin \alpha)^{n-i+1} d\alpha \\
&= -C_{n,i} r^n
\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante $C_{n,i}$.

Aus partieller Integration und der Ungleichung $a'(\bar{r}) < 0$ folgt für gegebenes $\epsilon > 0$ und genügend kleines $r > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^r a(\bar{r})b(\bar{r})d\bar{r} &= - \int_0^r a'(\bar{r})B(\bar{r})d\bar{r} \\ &\geq - \int_0^r a'(\bar{r})b_{n-i}\bar{r}^{n-i}(\theta(N(y_0) \cap S, y_0) - \epsilon)d\bar{r} \\ &= C_{n,i}b_{n-i}(\theta(N(y_0) \cap S, y_0) - \epsilon)r^n \end{aligned}$$

Es folgt

$$I(y_0) \geq C_{n,i}b_{n-i}\theta(N(y_0) \cap S, y_0) - \epsilon$$

Da das für beliebige $\epsilon > 0$ gilt, haben wir

$$I(y_0) \geq C_{n,i}b_{n-i}\theta(N(y_0) \cap S, y_0)$$

Aus Lebesgue's Theorem können wir damit folgende Ungleichung schließen:

$$\int_Q b_n\theta(S, x)dx \geq \int_Q C_{n,i}b_{n-i}\theta(N(y_0) \cap S, y_0)dy_0$$

Mit ganz analogen Rechnungen findet man in der anderen Richtung

$$\int_Q b_n\theta(S, x)dx \leq \int_Q C_{n,i}b_{n-i}\theta(N(y_0) \cap S, y_0)dy_0$$

wobei wieder dieselbe Konstante $C_{n,i}$ auftritt. Damit gilt

$$\int_Q \theta(S, x)dx = \frac{C_{n,i}b_{n-i}}{b_n} \int_Q \theta(N(y_0) \cap S, y_0)dy_0$$

An einem konkreten Beispiel (z.B. $S = \mathbb{R}^n$) macht man sich klar, daß $C_{n,i} = \frac{b_n}{b_{n-i}}$ gelten muß (das kann man natürlich auch über partielle Integration nachrechnen). Der Vorfaktor ist also gleich 1.

Damit haben wir Schritt 1 des Beweises beendet.

Schritt 2:

Jetzt setzen wir voraus, daß S eine kompakte definierbare Menge (beliebiger Dimension m) und X^i ein flaches Stratum ist, d.h. daß es einen in \mathbb{R}^n eingebetteten Euklidischen Raum \mathbb{R}^i gibt mit $X^i \subset \mathbb{R}^i$.

Sei $P \in X^i$ und $\epsilon > 0$.

Behauptung: Es gibt eine Umgebung $U_P \subset \mathbb{R}^n$ von P und eine Zerlegung von $S \cap U_P$ in disjunkte ϵ -analytische Stücke $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$, so daß die folgenden Bedingungen für $j = 1, \dots, q$ erfüllt sind:

- Es gibt einen m -dimensionalen Unterraum E_j von \mathbb{R}^n , der \mathbb{R}^i enthält, eine offene definierbare Teilmenge $U_j \subset E_j$ und eine analytische Abbildung $\phi_j : U_j \mapsto E_j^\perp$, so daß sich Γ_j schreiben läßt als Graph von ϕ_j in $E_j \oplus E_j^\perp = \mathbb{R}^n$ und so daß $\|D_u \phi_j\| \leq \epsilon$ für jedes $u \in U_j$ gilt.
- $S \cap U_P$ und $\cup_j \Gamma_j$ unterscheiden höchstens sich um eine Menge positiver Kodimension.

Man beachte, daß die entscheidende Forderung die Inklusion $\mathbb{R}^i \subset E_j$ ist, der Rest der Bedingungen ist einfach die Tatsache, daß die Γ_j eine Zerlegung von S in ϵ -analytische Stücke bilden.

Wir verzichten auf den Beweis der Behauptung, er verläuft fast wortwörtlich wie der Beweis der Existenz von Zerlegungen in ϵ -analytische Stücke in [K-R89], man benutzt dabei lediglich als Zusatzinformation Whitney's Bedingung A, die garantiert, daß alle Limestangentialräume am Stratum X^i den Raum \mathbb{R}^i enthalten.

Sei $\cup_k Y^k$ eine Whitney-Stratifikation des \mathbb{R}^n , die mit \mathbb{R}^i , den $E_j, j = 1, \dots, q$ sowie den $U_j, j = 1, \dots, q$ verträglich ist.

Die Stratifikation des \mathbb{R}^n induziert eine Whitney-Stratifikation der Menge $\overline{U_j}$, diese Menge ist dick im m -dimensionalen Raum E_j (da sie der Abschluß der offenen Menge U_j ist). Betrachte ein i -dimensionales Stratum Y^i , welches in \mathbb{R}^i und auf dem Rand von U_j liegt. Nach Schritt 1 (angewandt auf $\overline{U_j} \subset E_j$) gilt für fast jeden Punkt $Q \in Y^i$

$$\theta(U_j, Q) = \theta(U_j \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q)$$

Ist Y^i dagegen ein Stratum in \mathbb{R}^i , welches nicht auf dem Rand von U_j liegt, so gilt obige Gleichung trivialerweise, da dann Q nicht auf dem Rand von U_j liegt und sowohl die Dichte von U_j in Q als auch die Dichte des Querschnitts bei Q beide 0 sind.

Da die endliche Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ergibt, gelten für fast jeden Punkt $Q \in X^i \cap U_P$ die folgenden Gleichungen

$$\theta(U_j, Q) = \theta(U_j \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q), \quad j = 1, 2, \dots, q$$

Wir schreiben im folgenden $A \sim B$, wenn es eine Funktion $\psi : (0, \infty) \mapsto (1, \infty)$ gibt, so daß $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(\epsilon) = 1$ und $\psi(\epsilon)^{-1}A \leq B \leq \psi(\epsilon)A$ gilt.

Nach [K-R89] gilt für jedes der ϵ -analytischen Stücke Γ_j die Relation

$$\theta(U_j, Q) \sim \theta(\Gamma_j, Q)$$

Für jedes der Γ_j ist $(\mathbb{R}_Q^i)^\perp \cap \Gamma_j$ trivialerweise ein ϵ -analytisches Stück in $(\mathbb{R}_Q^i)^\perp$. Also gilt auch

$$\theta((\mathbb{R}_Q^i)^\perp \cap U_j, Q) \sim \theta((\mathbb{R}_Q^i)^\perp \cap \Gamma_j, Q)$$

Wir wissen, daß $S \setminus \cup_j \Gamma_j$ höchstens die Dimension $m - 1$ hat (speziell also eine Nullmenge bezüglich des m -Volumens ist). Für fast jeden Punkt Q ist folglich $(S \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp) \setminus (\cup_j \Gamma_j \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp)$ eine Menge positiver Kodimension, speziell eine Nullmenge bezüglich des $m - i$ -Volumens.

Aus Schritt 1 folgt für fast jeden Punkt $Q \in X^i \cap U_P$

$$\begin{aligned} \theta(S, Q) &\sim \theta(\cup_j \Gamma_j, Q) = \sum_j \theta(\Gamma_j, Q) \sim \sum_j \theta(U_j, Q) = \sum_j \theta(U_j \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q) \\ &\sim \sum_j \theta((\mathbb{R}_Q^i)^\perp \cap \Gamma_j, Q) = \theta(\cup_j \Gamma_j \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q) = \theta(S \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q) \end{aligned}$$

Wir halten also fest:

$$\theta(S, Q) \sim \theta(S \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q)$$

für fast jeden (bezüglich des i -dimensionalen Volumens) Punkt $Q \in X^i \cap U_P$.

Um den 2. Schritt zu beenden, wendet man maßtheoretische Argumente an um zu zeigen, daß daraus folgt, daß für fast jeden Punkt schon die Gleichheit $\theta(S, Q) = \theta(S \cap (\mathbb{R}_Q^i)^\perp, Q)$ gilt. Im wesentlichen benutzt man dabei, daß die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist und daß X^i durch eine abzählbare aufsteigende Folge von kompakten Teilmengen ausgeschöpft werden kann. Die Details sind elementar und sollen hier nicht ausgeführt werden.

Damit haben wir Schritt 2 beendet.

Schritt 3: Jetzt sei S eine beliebige kompakte, definierbare Menge und X^i ein beliebiges Stratum.

Sei $\epsilon > 0$ und $P \in X^i$ gegeben. Sei $\phi : \mathbb{R}^i \supset V \mapsto X^i, (\xi_1, \dots, \xi_i) \mapsto \phi(\xi_1, \dots, \xi_i)$ ein Koordinatensystem für eine Umgebung von P in X^i , so daß die Tangentenvektoren $\frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}$ im Punkt P eine orthogonale Basis bilden. Wir wählen

eine Familie differenzierbarer Normalenvektorfelder v_1, \dots, v_{n-i} , die in jedem Punkt Q in einer Umgebung von P eine orthogonale Basis des Normalenraums $(T_Q X^i)^\perp$ bilden.

Wir definieren eine Abbildung

$$H : V \times \mathbb{R}^{n-i} \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$H(\xi_1, \dots, \xi_{n-i}, y_1, \dots, y_i) = \phi(\xi_1, \dots, \xi_{n-i}) + y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_i v_i$$

Das Differential von H im Punkt $(0, \dots, 0)$ ist bezüglich der Orthogonalbasen $\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{n-i}}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_i}\}$ bzw. $\{\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial \xi_{n-i}}, v_1, \dots, v_i\}$ die Identität.

Also gibt es genügend kleine Umgebungen U_1 von $(0, \dots, 0)$ bzw. U_2 von P in \mathbb{R}^n , so daß H eine Bilipschitzabbildung zwischen U_1 und U_2 mit Lipschitzfaktor $1 + \epsilon$ ist. Das Urbild S' von $U_2 \cap S$ unter H ist eine definierbare Menge. Das Stratum X^i geht unter H über in das flache Stratum $\mathbb{R}^i \cap U_1$ und wir können Schritt 2 anwenden. Demnach ist für fast jeden Punkt $Q \in \mathbb{R}^i \cap U_1$ die Dichte des Querschnittes $(T_Q \mathbb{R}^i)^\perp \cap S'$ bei Q gleich der Dichte von S' bei Q :

$$\theta((T_Q \mathbb{R}^i)^\perp \cap S', Q) = \theta(S', Q)$$

Unter H gehen die Querschnitte von S' entlang $\mathbb{R}^i \cap U_1$ über in die Querschnitte von S entlang X^i , weiterhin wissen wir, daß H bilipschitz mit Faktor $1 + \epsilon$ ist. Also gibt es eine Funktion $\psi : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ mit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(\epsilon) = 1$ und

$$\psi(\epsilon)^{-1} \theta(S', Q') \leq \theta(S, H(Q')) \leq \psi(\epsilon) \theta(S', Q')$$

sowie

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon)^{-1} \theta((T_{Q'} \mathbb{R}^i)^\perp \cap S', Q') &\leq \theta((T_{H(Q')} X^i)^\perp \cap S, H(Q')) \\ &\leq \psi(\epsilon) \theta((T_{Q'} \mathbb{R}^i)^\perp \cap S', Q') \end{aligned}$$

Für fast jeden Punkt Q in $X^i \cap U_2$ gilt also

$$\psi(\epsilon)^{-2} \theta(S, Q) \leq \theta((T_Q X^i)^\perp \cap S, Q) \leq \psi(\epsilon)^2 \theta(S, Q)$$

Fassen wir zusammen, was wir bisher bewiesen haben:

Für gegebenes $\epsilon > 0$ gibt es zu jedem Punkt $P \in X^i$ eine Umgebung U_P , in der sich die Dichte von S bzw. die Dichte des Querschnittes fast überall nur um einen Faktor $\psi(\epsilon)^2$ unterscheiden, wobei $\psi(\epsilon) \rightarrow 1$ für $\epsilon \rightarrow 0$.

Aus einfachen Argumenten der Maßtheorie folgt daraus, daß die Dichte von S und die Dichte des Querschnittes von S für fast jeden Punkt von X^i übereinstimmen.

Das beendet Schritt 3 und damit den Beweis von Theorem 2.6. \square

Bemerkung: Für Lipschitz-stratifizierte Mengen (siehe [Par94]) hat man die Aussage des Theorems 2.6 nicht nur fast-überall, sondern für jeden Punkt. Das folgt mit einfachen Argumenten (Integration von Lipschitzvektorfeldern) aus der Produktformel für Dichten (Theorem 2.5). Für die Kategorie der global subanalytischen Mengen wurde die Existenz von Lipschitz-Stratifikationen in [Par94] gezeigt. In anderen o-minimalen Strukturen scheint die Frage nach der Existenz von Lipschitz-stratifikationen ungeklärt zu sein. Da wir die Haupttheoreme für beliebige o-minimale Strukturen formulieren wollen und uns letztlich nur für Maße interessieren, reicht die schwächere „fast-überall“-Aussage der Querschnittsformel für unsere Zwecke aus. An dieser Stelle sei jedoch die Vermutung geäußert, daß die Querschnittsformel bei Verdier-stratifizierten Mengen in jedem Punkt richtig ist. Um dies zu zeigen, würde es ausreichen, die Stetigkeit der Dichte des Querschnitts entlang der Straten zu verifizieren. Für die Dichte der Menge selbst wurde das bereits in [Co98] getan. Zwei stetige Funktionen, die auf einer zusammenhängenden Menge fast überall gleich sind, sind gleich, was die Vermutung beweisen würde. \square

Fassen wir zusammen, was wir in diesem und im vorigen Kapitel bewiesen haben, so ergibt sich folgendes

Theorem 2.7. *Sei S eine zusammenhängende, kompakte, definierbare Menge der Dimension m mit einer zahmen Stratifikation $S = \cup_i X^i$ und $U \subset S$ eine Borelmenge. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \text{scal}(S, U) &= \int_{U \cap X^m} s(x) d \text{vol}_m(x) \\ &+ 2 \int_{U \cap X^{m-1}} \left(\sum_{i=1}^k \text{tr} II_{w_i} \right) d \text{vol}_{m-1}(x) \\ &+ 4\pi \int_{U \cap X^{m-2}} \left(\frac{1}{2} + (-1)^m \frac{\chi_{\text{lok}}(S, x)}{2} - \theta_m(S, x) \right) d \text{vol}_{m-2}(x) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen w_1, w_2, \dots, w_k die Normalenvektoren von X^{m-1} in Richtung der höchstdimensionalen Straten, II_{w_i} steht für die symmetrische Bilinearform (2. Fundamentalform) $II_{w_i}(X, Y) := -\langle \nabla_X w_i, Y \rangle$ auf X^{m-1} und $\theta_m(S, x)$ ist die m -dimensionale Dichte von S in x . Die lokale Eulercharakteristik ist definiert durch $\chi_{\text{lok}}(S, x) := \chi(S, S \setminus \{x\})$.

Beweis: Der dritte Term folgt aus den Abschnitten 1.1.4, und 2.2.1 sowie Theorem 2.6. Man beachte, daß dieser Term auch dann seine Gültigkeit behält,

wenn X^{m-2} ein Stratum ist, welches nicht auf dem Rand eines m -Stratums liegt. Treffen in diesem Fall genau i Straten der Dimension $m-1$ auf X^{m-2} , so ergibt sich aus der Euleradditivität sofort

$$\chi_{lok} = (-1)^m(1-i), \quad \theta_m(S, x) = 0, \quad \Lambda_{m-2}(S, -)|_{X^{m-2}} = \left(1 - \frac{i}{2}\right) \text{vol}|_{X^{m-2}}$$

Der zweite Term folgt aus den Berechnungen aus Abschnitt 1.1.4, auch er behält seine Gültigkeit für ein Stratum X^{m-1} , welches nicht auf dem Rand von m -Straten liegt, denn dann ist $k=0$ und scal ist identisch 0.

Der erste Term folgt ebenfalls aus Kapitel 1.1.4. Andere Terme gibt es nicht, da Λ_{m-2} und damit scal auf Straten der Dimension $< m-2$ identisch verschwindet. \square

2.5 Das Reflexionsgesetz

Satz 2.8. *Sei S eine kompakte definierbare Menge mit zahmer Stratifikation $S = \cup_i X^i$, X^{m-1} und X^m Straten der Dimension $m-1$ bzw. m mit $X^{m-1} \subset \overline{X^m}$. Dann kann die Tangentialabbildung stetig von X^m auf P erweitert werden, das heißt, daß es einen eindeutigen m -dimensionalen Raum T gibt mit $T_Q X^m \rightarrow T$ für $Q \rightarrow P$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Menge der Limeseinheitsnormalenvektoren von X^m mit $\text{Nor}_e T_{\lim} X^m$, die Menge der Limeseinheitsnormalenvektoren in $P \in X^{m-1}$ sei $\text{Nor}_e T_{\lim, P} X^m$. Dann gilt nach [Ku99]

$$\dim \text{Nor}_e T_{\lim} X^m \leq n-2$$

Da die Projektion von $\text{Nor}_e T_{\lim} X^m$ auf X^{m-1} (stratenweise) submersiv ist und X^{m-1} die Dimension $m-1$ hat, gilt

$$\dim \text{Nor}_e T_{\lim, P} X^m \leq n-2 - (m-1) = n-m-1$$

Jetzt benutzt man folgendes einfache Lemma der linearen Algebra:

Lemma 2.9. *Eine mindestens eindimensionale definierbare Menge von Hyperebenen in der Grassmannmannigfaltigkeit $G_{\mathbb{R}}(n, m)$ enthält mindestens eine $m+1$ -dimensionale Menge von Punkten aus \mathbb{R}^n .*

Auf den Beweis des Lemmas soll hier verzichtet werden, wer etwas Lineare Algebra kennt, kann ihn auch selber durchführen.

Es folgt also, daß

$$\dim T_{\lim, P} X^m = 0$$

denn anderenfalls hätte die Menge derjenigen $n - m$ -dimensionalen Räume, die zu einem m -dimensionalen Raum aus $T_{\lim, P}X^m$ orthogonal stehen, Dimension mindestens 1. Nach dem Lemma hätte dann die Menge der Limeseinheitsnormalenvektoren die Dimension mindestens $n - m$, ein Widerspruch.

Aus topologischen Gründen ist für jedes $P \in X^{m-1}$ die Menge $T_{\lim, P}X^m$ zusammenhängend. Ist sie nulldimensional, so besteht sie aus nur einem Punkt, und das bedeutet, daß die Tangentialabbildung stetig auf P fortgesetzt werden kann. \square

Satz 2.10. *Sei S eine kompakte definierbare Menge mit zahmer Stratifikation $S = \cup_i X^i$, X^{m-1} und X^m Straten der Dimension $m - 1$ bzw. m mit $X^{m-1} \subset \overline{X^m}$. Dann gibt es eine definierbare Teilmenge $E \subset X^{m-1}$ der Dimension kleiner als $m - 1$ so daß für jeden Punkt $P \in X^{m-1} \setminus E$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- a) *Die Tangentialabbildung kann stetig von X^m auf P erweitert werden.*
- b) *In der Nähe von P ist Verdier's Bedingung erfüllt.*

Beweis: Wir können die Stratifikation verfeinern, so daß sie in jedem Stratum Verdier's Bedingung genügt (siehe [TaLe98]). Die Verdierbedingung ist also außerhalb einer gewissen Menge E von Straten der Dimension $< m - 1$ auf X^{m-1} erfüllt.

Die erste Bedingung ist nach dem vorigen Satz nicht nur außerhalb von E , sondern auf ganz X^{m-1} erfüllt. \square

Satz 2.11. *Seien X^m und X^{m-1} zwei Straten wie oben. Angenommen, die Tangentialabbildung kann stetig von X^m auf P mit Limestangentenraum T fortgesetzt werden. Dann können wir X^m in einer Umgebung von P wie folgt beschreiben: Es gibt eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n mit zugehörigen Koordinaten $\{x_1, \dots, x_n\}$ und glatte Funktionen g, f so daß:*

- $T_P X^{m-1} = \{x_m = x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$
- $T = \{x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0\}$
- X^m ist der Graph von f über der offenen Menge $U = \{(x_1, \dots, x_m) \in T : x_m > g(x_1, \dots, x_{m-1})\}$
- Die ersten partiellen Ableitungen von f , $\frac{\partial f}{\partial x_i}(Q)$, konvergieren gegen 0 für $Q \rightarrow P$.

Bemerkung: x_1, \dots, x_m bildet ein Koordinatensystem von T . Für Punkte aus T benutzen wir meist dieses Koordinatensystem.

Beweis: Wir wissen, daß X^{m-1} eine glatte $m - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Der Tangentialraum $T_P X^{m-1}$ ist in T enthalten und die Dimension von T ist m . Mit dem Satz über implizite Funktionen folgt, daß die Projektion von X^{m-1} auf T eine glatte Hyperfläche in T ist, welche als der Graph einer glatten Funktion g beschrieben werden kann.

Wählen wir zuerst ein Koordinatensystem auf $T_P X^{m-1}$, erweitern es zu einem Koordinatensystem von T und dann zu einem von \mathbb{R}^n , so sind die ersten beiden Bedingungen automatisch erfüllt.

Nach Annahme ist der Tangentialraum $T_Q X^m$ nahe bei T in der Grassmannmannigfaltigkeit. Die Projektion von X^m auf T ist deswegen bijektiv und glatt. Mit einfachen topologischen Argumenten sieht man, daß das Bild eine der beiden Mengen $\{x_m > g(x_1, \dots, x_{m-1})\}$ oder $\{x_m < g(x_1, \dots, x_{m-1})\}$ sein muß. Indem wir notfalls die Vorzeichen von x_m und g wechseln, können wir annehmen, daß dieses Bild gleich der Menge $U = \{x_m > g(x_1, \dots, x_{m-1})\}$ ist. Da X^m glatt ist, folgt die Existenz einer glatten Funktion f , so daß X^m der Graph von f über U ist. Aus der eindeutigen Existenz des Limestangentialraumes folgt, daß die partiellen Ableitungen f gegen 0 konvergieren. \square

Bemerkung: Wir können f stetig zu einer Funktion auf $\bar{U} = U \cup \text{graph } g$ erweitern. Der Graph von f über der Menge $\text{graph } g$ ist dann einfach X^{m-1} . Da das ein glattes Stratum ist, ist $f|_{\text{graph } g}$ glatt. Wir wissen weiterhin, daß $T_P X^{m-1} \subset T$, das liefert uns die Tatsache, daß die partiellen Ableitungen von $f|_{\text{graph } g}$ bei 0 verschwinden.

Satz 2.12. *Gleiche Situation wie oben. Seien $A \in X^m$ und $P \in X^{m-1}$ Punkte mit $d_i(A, P) \leq d_i(A, P')$ für alle Punkte $P' \in X^{m-1}$, d.h. P ist der bezüglich der inneren Metrik am nächsten zu A gelegene Punkt von X^{m-1} . Wir nehmen weiterhin an, daß es einen eindeutig bestimmten Limestangentialraum T von X^m in P gibt. Wähle eine Geodätische γ zwischen P und A , parametrisiere sie nach der Bogenlänge mit $\gamma(0) = P$. Sei w der Vektor $(0, \dots, 0, 1)$ in dem Koordinatensystem von T , welches wir in Satz 2.11 konstruiert haben. Dann gilt*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\gamma(\alpha) - P}{\alpha} = w$$

Beweis: Angenommen, es existiert ein Vektor $w' \in \mathbb{R}^n$, $w' \neq w$ und eine Folge von reellen Zahlen $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \rightarrow 0$ so daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\alpha_i) - P}{\alpha_i} = w'$$

Setze $r_i := \left\| \frac{\gamma(\alpha_i) - P - \alpha_i w'}{\alpha_i} \right\|$. Dann strebt r_i gegen 0. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$r_i \alpha_i \geq d_e(\gamma(\alpha_i), P) - \alpha_i \|w'\|$$

Wir wissen, daß $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_e(\gamma(\alpha_i), P)}{\alpha_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_e(\gamma(\alpha_i), P)}{d_i(\gamma(\alpha_i), P)} = 1$ (siehe Beweis zu Satz 2.4). Es folgt $\|w'\| \geq 1$.

Andererseits gilt immer $d_i \geq d_e$ und damit $\|\gamma(\alpha_i) - P\| \leq \alpha_i$ sowie

$$\|w'\| \leq \left\| w' - \frac{\gamma(\alpha_i) - P}{\alpha_i} \right\| + \left\| \frac{\gamma(\alpha_i) - P}{\alpha_i} \right\| \leq r_i + 1$$

Wegen $r_i \rightarrow 0$ folgt $\|w'\| \leq 1$ und schließlich $\|w'\| = 1$.

Da T der eindeutige Limestangentialraum ist, gilt $w' \in T$. Eine der ersten $m - 1$ Koordinaten von w' kann nicht 0 sein, da $w' \neq w$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $w' = (w_1, \dots, w_m)$ mit $w_1 \neq 0$.

Dann sind die Koordinaten der Projektion von $\gamma(\alpha_i)$ auf T , $\Pi_T \gamma(\alpha_i) \in T$, gegeben durch (h_1, \dots, h_m) mit $h_j = \alpha_i w_j + o(\alpha_i)$.

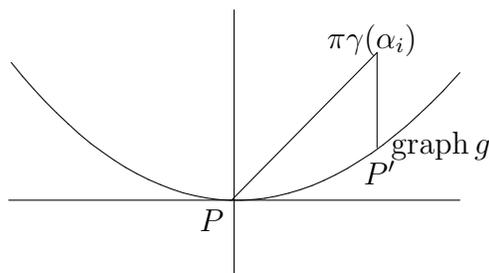
Die Strecken L_i , die diese Punkte mit

$$P' = (h_1, \dots, h_{m-1}, g(h_1, \dots, h_{m-1})) \in T$$

verbinden, haben Länge $l_i = h_m - g(h_1, \dots, h_{m-1})$ (siehe Abbildung 2.1). Da die Ableitungen von g bei 0 verschwinden, folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{l_i}{\alpha_i} \right| = |w_m| < 1$$

Abbildung 2.1:



Für genügend große i hat f beliebig kleine partielle Ableitungen auf L_i . Deswegen hat das Urbild von L_i unter der Projektion auf T , welches eine Kurve in X^m ist, eine Länge, die nahe bei der Länge von L_i ist. Damit ist sie echt kleiner als α_i . Das ist ein Widerspruch, denn wir haben angenommen, daß es keinen Punkt auf X^{m-1} gibt, dessen Abstand zu A kleiner ist als der von P , aber P' ist ein solcher Punkt. \square

Ein ähnlicher Beweis wird uns folgendes Resultat liefern:

Satz 2.13. (Reflexionsgesetz) Sei S eine kompakte definierbare Menge mit einer festen zahmen Stratifikation $S = \cup_i X^i$ und X^{m-1} ein $m-1$ -Stratum auf dem Rand von genau zwei m -Straten X_1^m, X_2^m . Sei γ eine Geodätische mit $\gamma(\alpha) \in X_1^m$ für $\alpha < 0$, $P = \gamma(0) \in X^{m-1}$, die über P hinaus verlängert werden kann. Wir nehmen an, daß es zu jedem der beiden m -Straten einen eindeutig bestimmten Limestangentialraum T_1 bzw. T_2 in P gibt. Wir wählen zu beiden m -Straten $X_k^m, k = 1, 2$ jeweils eine Darstellung wie in Satz 2.11. Da sowohl T_1 als auch T_2 den Raum $T_P X^{m-1}$ enthalten, können wir annehmen, daß die Koordinaten x_1, \dots, x_{m-1} bezüglich dieser beiden Darstellungen auf $T_P X^{m-1}$ die gleichen sind. Sei $w_1 = (a_1, \dots, a_m, 0)_1$ der Tangentenvektor von $\gamma|_{<0}$. Falls w_1 nicht in $T_P X^{m-1}$ enthalten ist, so hat $\gamma|_{>0}$ einen eindeutig bestimmten Tangentenvektor w_2 bei P , der durch $w_2 = (-a_1, \dots, -a_{m-1}, a_m)_2$ gegeben ist. (Der Index bezieht sich auf das entsprechende Koordinatensystem).

Bemerkung:

- a) Ist w_1 in $T_P X^{m-1}$ enthalten, so gilt das gleiche für w_2 . Anderenfalls könnten wir den Satz mit vertauschten Rollen von X_1^m und X_2^m anwenden.
- b) Ist w_1 nicht in $T_P X^{m-1}$ enthalten, so haben beide Seiten von γ eindeutig bestimmte Tangenten. Um das zu sehen, muß man den obigen Satz zweimal anwenden. Es folgt $\gamma(\alpha) = P + \alpha w_1 + o(\alpha)$ und $\gamma(-\alpha) = P + \alpha w_2 + o(\alpha)$ für kleine positive α .

Beweis des Satzes:

Wir bezeichnen mit Π_1 bzw. Π_2 die Projektion von \mathbb{R}^n auf T_1 bzw. T_2 .

Schritt 1: Wir nehmen zunächst an, daß es eine Folge reeller Zahlen $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \rightarrow 0$ gibt mit $\gamma(\alpha_i) \in \bar{X}_1^m$ für jedes i . Die Menge

$$\left\{ \frac{\gamma(\alpha_i) - P}{\alpha_i}, i = 1, 2, \dots \right\}$$

hat dann einen Häufungspunkt w' der Norm 1 (das folgt mit gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 2.12). Wir wählen eine Unterfolge von $\{\alpha_i\}$ (die wir aus Bequemlichkeit wieder α nennen), so daß

$$\gamma(\alpha_i) = P + \alpha_i w' + o(\alpha_i)$$

Sei w' in Koordinaten durch $w' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m)_1$ gegeben

Da alle partiellen Ableitungen von g in 0 verschwinden, liegt die Strecke zwischen $\Pi_1 \gamma(\alpha_i)$ und $\Pi_1 \gamma(-\alpha_i)$ vollständig in U . Ihre Länge ist $\alpha_i \|w' - w\| + o(\alpha_i)$. Der Graph von f über dieser Strecke liefert eine Kurve in S zwischen $\gamma(\alpha_i)$ und $\gamma(-\alpha_i)$ mit Länge kleiner oder gleich

$$(1 + o(1))(\alpha_i \|w' - w\| + o(\alpha_i)) = \alpha_i \|w' - w\| + o(\alpha_i)$$

Das folgt wieder aus der Tatsache, daß die partiellen Ableitungen von f für $\alpha_i \rightarrow 0$ gegen 0 gehen.

Andererseits ist γ eine Geodätische zwischen $\gamma(\alpha_i)$ und $\gamma(-\alpha_i)$, das bedeutet

$$d_i(\gamma(\alpha_i), \gamma(-\alpha_i)) = 2\alpha_i$$

Aus beiden Ungleichungen folgt $\|w' - w\| \geq 2$. Das ist ein Widerspruch, denn sowohl w' als auch w haben beide Norm 1 und die Koordinate $a_m > 0$ bzw. $a'_m \geq 0$. Unsere Annahme muß also falsch sein. Deswegen ist $\gamma(\alpha) \in X_2^m$ für α in einem Intervall $(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Schritt 2: Sei jetzt w'' ein Tangentenvektor von $\gamma_{>0}$, d.h. es gibt eine Folge reeller Zahlen $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \rightarrow 0$ mit

$$\gamma(\alpha_i) = P + \alpha_i w'' + o(\alpha_i)$$

Wieder folgt $\|w''\| = 1$ mit leichten Argumenten. Sei

$$w'' = (a''_1, \dots, a''_m, 0, \dots, 0)_2 \in T_2$$

Betrachte in \mathbb{R}^m die Punkte (a_1, \dots, a_m) und $(a''_1, \dots, a''_{m-1}, -a''_m)$. Wegen $a_m > 0$ und $a'_m \geq 0$ schneidet die Strecke zwischen diesen Punkten die Menge $\{x_m = 0\}$ in einem Punkt $b = (b_1, \dots, b_{m-1}, 0)$.

Für kleine α_i liegt die Strecke zwischen $\Pi_1 \gamma(-\alpha_i)$ und $Q = (b, g_1(b))_1$ vollständig in U_1 und hat eine bestimmte Länge l_1 , während die Strecke zwischen $\Pi_2 \gamma(\alpha_i)$ und $R = (b, g_2(b))_2$ in U_2 liegt und die Länge l_2 hat (siehe Abbildung 2.2). Aus der Tatsache, daß g glatt ist mit in 0 verschwindenden Ableitungen, können wir schlußfolgern, daß

$$l_1 + l_2 = \alpha_i \|(a_1 - a''_1, \dots, a_{m-1} - a''_{m-1}, a_m + a''_m)\| + o(\alpha_i)$$

Wir können wieder den Graphen von f über der Vereinigung dieser beiden Strecken betrachten. Das liefert eine Kurve, die $\gamma(\alpha_i)$ und $\gamma(-\alpha_i)$ in S verbindet (wegen $\Pi_1^{-1}(Q) = \Pi_2^{-1}(R) \in X^{m-1}$) und Länge kleiner oder gleich

$$\alpha_i \|(a_1 - a'_1, \dots, a_{m-1} - a'_{m-1}, a_m + a'_m)\| + o(\alpha_i)$$

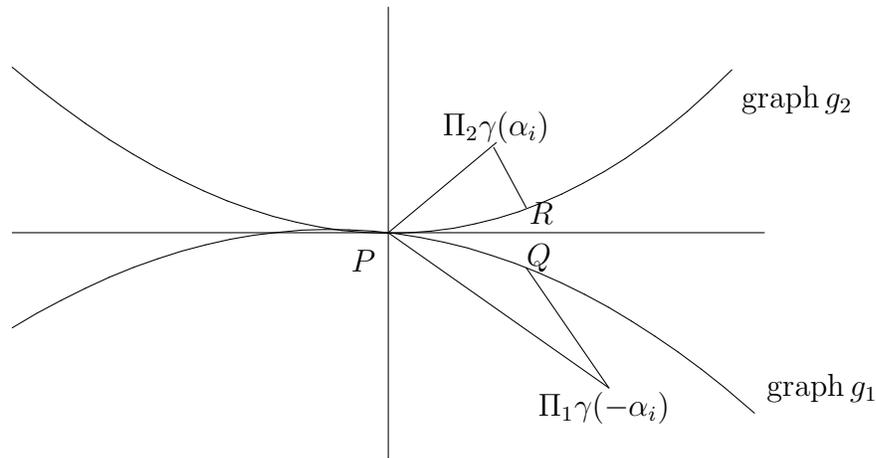
besitzt.

Das kann nicht kleiner sein als $d_i(\gamma(\alpha_i), \gamma(-\alpha_i)) = 2\alpha_i$, denn γ ist eine Geodätische zwischen diesen beiden Punkten. Also ist

$$\|(a_1 - a'_1, \dots, a_{m-1} - a'_{m-1}, a_m + a'_m)\| \geq 2$$

Daraus folgt $a'_1 = -a_1, a'_2 = -a_2, \dots, a'_{m-1} = -a_{m-1}, a'_m = a_m$. \square

Abbildung 2.2:



Satz 2.14. *Sei S eine kompakte definierbare, zahm stratifizierte Menge, die die Eigenschaft hat, daß genügend kurze Geodätische verlängert werden können (z.B. ein $CAT(\kappa)$ -Raum, der eine topologische Mannigfaltigkeit ist). Sei X^{m-1} ein Stratum auf dem Rand von genau zwei höchstdimensionalen Straten X_1^m, X_2^m . Dann gibt es eine dichte Menge von Punkten $P \in X^{m-1}$, durch die eine Geodätische γ geht, die eindeutig bestimmte, zu $T_P X^{m-1}$ orthogonale Tangentenvektoren auf beiden Seiten hat.*

Beweis: Wähle einen Punkt $A \in X_1^m$ nahe X^{m-1} und den Punkt P , der A in der inneren Metrik am nächsten ist. So ein Punkt existiert wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion und Kompaktheitsargumenten. P muß nicht eindeutig sein, das spielt keine Rolle.

Es ist klar, daß auf diese Weise eine dichte Menge von Punkten P getroffen wird. Also können wir weiterhin annehmen, daß P die beiden Bedingungen von Satz 2.10 erfüllt und wir können die Sätze 2.13 und 2.12 anwenden.

Wähle eine Geodätische zwischen A und P und erweitere sie zu einer Geodätischen γ . Wir parametrisieren sie nach der Bogenlänge und so, daß $\gamma(0) = P$, $\gamma(-d_i(A, P)) = A$. Aus Satz 2.13 folgt $\gamma(\alpha) \in X_2^m$ für kleine positive α .

Wir wissen wegen Satz 2.12, daß $\gamma|_{<0}$ einen eindeutig bestimmten Tangentenvektor $w_1 = (0, \dots, 0, 1)_1$ hat. Der Index bezieht sich wieder auf das Koordinatensystem aus Satz 2.11. Wir können Satz 2.13 anwenden und sehen, daß $\gamma_{>0}$ den Vektor $w_2 = (0, \dots, 0, 1)_2$ als Tangente bei P haben muß. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. \square

Kapitel 3

Das Haupttheorem für definierbare Alexandrovräume

Nachdem wir die skalare Krümmung von definierbaren Mengen eingeführt und verschiedene Weisen zur Berechnung kennengelernt haben, kommen wir zum Zusammenhang mit der metrischen Differentialgeometrie.

In diesem Kapitel werden wir folgende klassische Aussage der Riemannschen Geometrie verallgemeinern:

Hat eine Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtnegative Schnittkrümmung, so ist auch die Skalarkrümmung nichtnegativ.

Die Skalarkrümmung einer definierbaren Menge ist ein signiertes Maß und es macht Sinn zu sagen, daß ein signiertes Maß positiv ist. Doch was bedeutet es, daß eine definierbare Menge eine nichtnegative Schnittkrümmung hat? Um dies zu interpretieren, benutzen wir die Theorie der Alexandrovräume. Sie liefert eine Bedingung, die im Falle von Riemannschen Mannigfaltigkeiten zur Positivität der Schnittkrümmung äquivalent ist, aber für (fast) beliebige metrische Räume Sinn macht. Es liegt also nahe, die Aussage „Eine definierbare Menge hat positive Schnittkrümmung“ durch „Sie ist ein Alexandrovraum“ zu interpretieren.

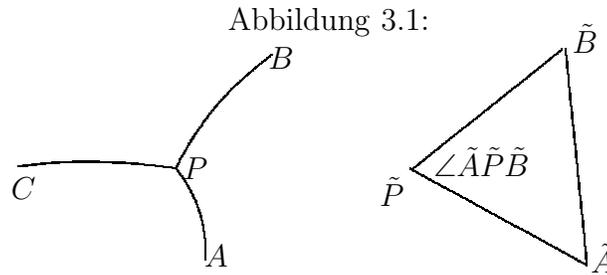
Während der Beweis der obigen klassischen Aussage auf der Hand liegt, ist die Verallgemeinerung auf definierbare Mengen sehr schwer zu beweisen. Die Beweisidee ist folgende: wäre das Ergebnis falsch, so könnte man mit Hilfe der Theorie der Alexandrovräume „genügend viele“ Punkte auf der Sphäre mit paarweise „großen“ Abständen konstruieren, was nicht möglich ist.

3.1 Alexandrovräume

Definition 3.1. *Ein lokal vollständiger metrischer Raum M heißt Alexandrovraum mit nach unten durch κ beschränkter Schnittkrümmung,*

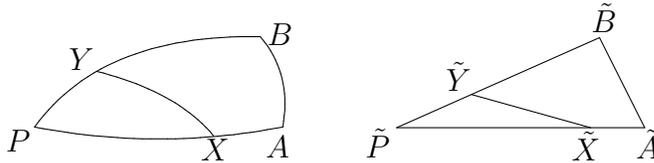
falls die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

- a) Die Metrik auf M ist intrinsisch (für beliebige zwei Punkte $x, y \in M$ und $\delta > 0$ gibt es eine endliche Folge von Punkten $z_0 = x, z_1, \dots, z_k = y$ in M , so daß $d(z_i, z_{i+1}) < \delta$ für alle $i = 0, \dots, k-1$ und $\sum_{i=0}^{k-1} d(z_i, z_{i+1}) < d(x, y) + \delta$ gilt).
- b) Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine Umgebung U_x so daß für 4 beliebige paarweise verschiedene Punkte (P, A, B, C) in U_x die Ungleichung $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA \leq 2\pi$ gilt. Dabei bezeichnet $\angle APB$ den Winkel bei \tilde{P} eines Vergleichsdreiecks $\tilde{P}\tilde{A}\tilde{B} \in H_\kappa^2$ mit Seitenlängen $d(\tilde{P}, \tilde{A}) = d(P, A), d(\tilde{P}, \tilde{B}) = d(P, B), d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d(A, B)$ (siehe Abbildung 3.1). Die anderen Winkel sind analog definiert.



Die Räume, die wir in dieser Arbeit betrachten, haben alle eine innere Metrik. Mit „Alexandrov’s Bedingung“ meinen wir deshalb stets die zweite der beiden obigen Bedingungen. Ist M ein lokalkompakter Raum, so können zwei genügend nahe Punkte durch eine Geodätische verbunden werden. Die Alexandrovbedingung ist dann äquivalent zu folgender Bedingung: Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine Umgebung U_x , so daß für jedes geodätische Dreieck mit Ecken P, A, B und Punkten X auf $[P, A]$ und Y auf $[P, B]$ die Ungleichung $d(X, Y) \geq d(\tilde{X}, \tilde{Y})$ gilt. Dabei ist \tilde{X} ein Punkt auf der Geodätischen $[\tilde{P}, \tilde{A}]$ eines Vergleichsdreiecks $\tilde{P}, \tilde{A}, \tilde{B}$ in H_κ^2 , für den $d(P, X) = d(\tilde{P}, \tilde{X})$ gilt. Der Punkt \tilde{Y} ist entsprechend definiert, er liegt auf der Geodätischen $[\tilde{P}, \tilde{B}]$. Siehe auch Abbildung 3.2.

Abbildung 3.2: Alexandrov’s Bedingung ($\kappa = 0$)



Alexandrovräume verallgemeinern das Konzept einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nach unten beschränkter Schnittkrümmung. Genauer gesagt gilt folgendes Theorem:

Theorem 3.2. (Toponogov's Theorem)

Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann ein Alexandrovraum mit Schnittkrümmung $\geq \kappa$, wenn die Schnittkrümmung im klassischen Sinne $\geq \kappa$ ist.

Die Bedeutung von Alexandrovräumen ergibt sich aus Grenzüberlegungen in der Riemannschen Geometrie. Auf der Menge¹ MET der metrischen Räume kann man einen Abstand d_{G-H} einführen (Gromov-Hausdorff-Metrik). Die Riemannsche Mannigfaltigkeiten (fester Dimension) mit Schnittkrümmung $\geq \kappa$ bilden eine Teilmenge, die nicht abgeschlossen ist. Punkte auf dem Rand dieser Menge können recht schwierige Singularitäten aufweisen, auch Sprünge in der Dimension sind möglich. Es gibt sehr umfangreiche Literatur darüber, wie dieses „Zusammenfallen“ (collapsing) vor sich geht, wir verweisen auf [Ber98] für einen Überblick. Andererseits bildet die Menge der Alexandrovräume mit Dimension $\leq n$, Krümmung $\geq \kappa$ und Durchmesser $\leq D$ eine kompakte Teilmenge in (MET, d_{G-H}) . Folgen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die diese drei Ungleichungen (mit festen Werten für n, D, κ) erfüllen, konvergieren also gegen Alexandrovräume. Das erklärt, warum sie in der Riemannschen Geometrie so wichtig sind.

Wer mehr über dieses recht junge Gebiet wissen möchte, sollte in [B-G-P92] nachschlagen.

3.2 Beweis des Theorems

Zunächst formulieren wir das Haupttheorem über definierbare Alexandrovräume:

Theorem 3.3. *Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende, definierbare Menge der Dimension m , welche ein Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ (bezüglich der inneren Metrik) ist. Dann gilt*

$$\text{scal}(S, -) \geq \kappa m(m-1) \text{vol}(S, -)$$

d.h. für jede Borelmenge $U \subset S$ gilt $\text{scal}(S, U) \geq \kappa m(m-1) \text{vol}_m(U)$.

Beweis: Wegen der Additivität beider Seiten kann man das Theorem stratenweise beweisen. Dazu betrachten wir eine feste zahme Stratifizierung von S . Da die Skalarkrümmung auf Straten mit Kodimension größer als 2 identisch 0 ist, muß die obige Ungleichung nur für die drei Fälle $U \subset X^{m-2}$, $U \subset X^{m-1}$ und $U \subset X^m$ gezeigt werden. Das werden wir in den Sätzen 3.7, 3.10, 3.11 und 3.14 tun. Vorher muß allerdings die Topologie von definierbaren Alexandrovräumen untersucht werden. \square

¹ (MET, d_{G-H}) ist natürlich weder eine Menge noch ein metrischer Raum, denn sonst würde sie sich selbst enthalten. Man sollte besser von der Klasse der metrischen Räume sprechen.

Korollar 3.4. *Gegeben sei eine Analytisch-Geometrische Kategorie \mathcal{C} . Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende \mathcal{C} -Menge der Dimension m mit einer festen Metrik. Falls S ein Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ ist, so gilt*

$$\text{scal}(S, -) \geq \kappa m(m-1) \text{vol}(S, -)$$

d.h. für jede Borelmenge $U \subset S$ gilt $\text{scal}(S, U) \geq \kappa m(m-1) \text{vol}(U)$.

Beweis des Korollars: Alle Größen und Eigenschaften sind lokaler Natur. Ist $S \subset M$, so können wir mit Hilfe des Satzes von Nash eine Umgebung U eines Punktes $P \in M$ isometrisch in einen Euklidischen Raum einbetten, dabei wird $S \cap U$ auf eine definierbare Menge abgebildet (siehe die Bemerkungen in Abschnitt 1.5). Für diese kann man das Haupttheorem anwenden. \square

3.2.1 Topologische Konsequenzen aus der Alexandrovbedingung

Für den Rest des Kapitels setzen wir voraus, daß S ein abgeschlossener, definierbarer Alexandrovraum der Dimension m mit Schnittkrümmung $\geq \kappa$ ist.

In den Formeln, die wir in Abschnitt 1.4 abgeleitet haben, kamen sowohl topologische Größen (lokale Eulercharakteristik) wie auch geometrische Größen (Dichte, mittlere Krümmung) vor. Die topologischen Größen können mit Hilfe der Alexandrovbedingung recht genau bestimmt werden. Als Ergebnis erhält man, daß die Topologie von definierbaren Alexandrovräumen in der Nähe von Straten der Kodimension 1 oder 2 nicht zu kompliziert ist.

Lemma 3.5. *Ein $m-1$ -Stratum X^{m-1} liegt im Abschluß von genau einem oder genau zwei Straten der höchsten Dimension. Im ersten Fall ist jeder Punkt des Stratums ein Randpunkt im Sinne von [B-G-P92].*

Beweis: Da die Hausdorff-Dimension von S genau m ist, sind die Explosionsindices („burst indices“) in der Nähe jedes Punktes konstant m (siehe [B-G-P92], Korollar 6.5). Das schließt sofort den Fall aus, daß es gar kein m -Stratum gibt, welches das gegebene $m-1$ Stratum auf dem Rand hat.

Wenn es 3 oder mehr solcher Straten gibt, so wählen wir einen Punkt $P \in X^{m-1}$. Der Normalenschnitt $(T_P X^{m-1})^\perp \cap S$ besteht aus mindestens 3 ein-dimensionalen Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, die wir nach der Bogenlänge mit $\gamma_i(0) = P$ parametrisieren können. Wir setzen $A(t) = \gamma_1(t)$, $B(t) = \gamma_2(t)$, $C(t) = \gamma_3(t)$.

Für genügend kleine t muß jeder Weg zwischen zwei von diesen Punkten durch das Stratum X^{m-1} gehen. Mit Abschätzungen, wie wir sie in 3.2.3 noch durchführen werden, sehen wir, daß $\lim_{t \rightarrow 0} \angle(A(t), P, B(t)) = \pi$ gilt und entsprechende Gleichungen für die anderen Winkel. Das widerspricht der Alexandrovbedingung für das Quadrupel $(P, A(t), B(t), C(t))$. Damit ist die erste Aussage des Lemmas bewiesen.

Als nächstes nehmen wir an, daß X^{m-1} auf dem Rand von genau einem m -Stratum liegt. Eine Umgebung eines Punktes $P \in X^{m-1}$ ist dann homöomorph zu einem Halbraum der Dimension m . Das ist offensichtlich ein Alexandrovraum, in dem Randpunkte im Alexandrovsinne und Randpunkte im gewöhnlichen Sinne übereinstimmen. Da die Eigenschaft, Randpunkt im Alexandrovsinne zu sein, nur von der Topologie einer Umgebung abhängt ([B-G-P92], Theorem 13.3 a), muß P ein solcher Randpunkt sein. \square

Lemma 3.6. *Für ein Stratum X^{m-2} der Kodimension 2 und einen Punkt $P \in X^{m-2}$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:*

- a) *Die lokale Eulercharakteristik des Normalenschnittes ist 0 und der Punkt ist ein Randpunkt im Alexandrovsinne.*
- b) *Die lokale Eulercharakteristik des Normalenschnittes ist 1.*

Beweis: Der Normalenschnitt bei P besteht aus einer endlichen Vereinigung von zweidimensionalen Mengen, die jeweils (lokal) aus zwei Kurven (1-Straten) und einer Fläche zwischen ihnen (2-Stratum) bestehen (besser gesagt kann man das durch Aufschneiden stets erreichen). Man beachte, daß diese Vereinigung nicht leer ist, das folgt wieder aus dem Explosionsindexargument. Je zwei dieser Mengen können entweder benachbart sein (das bedeutet, daß ihre Ränder eine gemeinsame Kurve enthalten) oder nicht. Es ist nicht möglich, daß drei dieser Mengen eine gemeinsame Randkurve haben, denn das würde einen Widerspruch zum obigen Lemma liefern. Teilen wir diese Mengen bezüglich der Äquivalenzrelation „durch eine Folge von benachbarten Mengen verbunden sein“ in Äquivalenzklassen ein, so bestehen diese aus Folgen der Form (A_1, A_2, \dots, A_l) , wobei zwei aufeinanderfolgende Mengen A_i, A_{i+1} stets benachbart sind und A_1 und A_l entweder benachbart sind oder nicht.

Angenommen, es gibt drei oder mehr solcher Äquivalenzklassen. Mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis des obigen Lemmas erhielten wir einen Widerspruch zur Alexandrovbedingung.

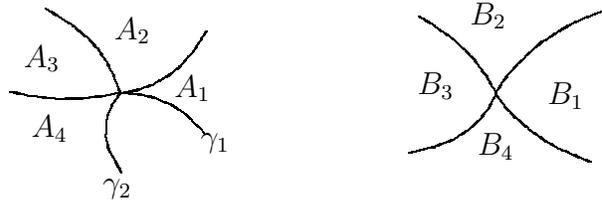
Angenommen, es gibt genau eine solche Äquivalenzklasse (A_1, A_2, \dots, A_l) . Sind A_1 und A_l benachbart, so ist eine Umgebung des Normalenschnittes bei P zur Euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 homöomorph und die lokale Eulercharakteristik ist 1 (Fall b). Sind A_1 und A_l nicht benachbart, so ist eine Umgebung des Normalenschnittes bei P homöomorph zu einem zweidimensionalen Halbraum und die lokale Eulercharakteristik ist 0. Die Kurve auf dem Rand von A_1 , welche nicht Randkurve von A_2 ist, besteht aus Randpunkten im Alexandrovsinne, da sie einem $m - 1$ -Stratum in S entspricht, welches auf dem Rand genau eines m -Stratums liegt. Der Alexandrovrand ist abgeschlossen (siehe [B-G-P92], Theorem 13.3 b). Damit muß P ein Randpunkt sein (Fall a).

Es bleibt der Fall, daß es genau zwei solcher Äquivalenzklassen gibt. Wir bezeichnen sie mit $A = (A_1, \dots, A_l)$ und $B = (B_1, \dots, B_k)$. Sind A und B

geschlossen, d.h. sowohl A_1 und A_l als auch B_1 und B_k sind benachbart, dann ist $\chi_{lok} = 1$ und wir sind wieder im Fall b. Ist A offen und B geschlossen (oder umgedreht), so ist $\chi_{lok} = 0$ und P ist ein Randpunkt wie oben (siehe Abbildung 3.3).

Abbildung 3.3:

Offene Äquivalenzklasse Geschlossene Äquivalenzklasse



Wir können also annehmen, daß sowohl A als auch B offen sind. In diesem Fall ist $\chi_{lok} = -1$. Sei α_1 der Winkel von A bei P und α_2 der Winkel von B bei P . Wäre $\alpha_1 > 0$ so könnten wir die Randkurven von A nehmen, welche dadurch charakterisiert sind, daß sie auf dem Rand von A_1 bzw. A_l , aber nicht auf dem Rand eines anderen A_i liegen. Wir parametrisieren sie nach der Bogenlänge und nennen sie γ_1 und γ_2 (siehe Abbildung 3.3, links). Sei weiterhin γ_3 irgendeine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in B . Dann ist $\lim_{t \rightarrow 0} \angle(P, \gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \alpha_1 > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \angle(P, \gamma_{1,2}(t), \gamma_3(t)) = \pi$. Das ist ein Widerspruch zu Alexandrov's Bedingung für das Quadrupel $(P, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Folglich ist $\alpha_1 = 0$ und mit analogen Argumenten folgt $\alpha_2 = 0$.

Nach Abschnitt 2.1 folgt, daß die Dichte des Normalenschnittes in diesem Fall 0 ist. Die lokale Eulercharakteristik ist aber entlang Straten einer Whitney-Stratifikation konstant, also muß dann die Dichte des Normalenschnittes entlang des Stratums X^{m-2} überall 0 sein. Nach Theorem 2.6 ist dann die Dichte von S für fast jeden Punkt $P \in X^{m-2}$ 0. Speziell gibt es mindestens einen Punkt, wo sie 0 ist. Das widerspricht Satz 3.12, wo gezeigt wird, daß die Dichte stets positiv ist. Dieser Fall kann also ausgeschlossen werden.

Bemerkung: Mit Blick auf das Lemma 3.5 könnte man vermuten, daß ein definierbarer Alexandrovraum immer eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Das ist allerdings nicht der Fall. Beispielsweise kann man CP^2 mit einer Metrik mit positiver Krümmung ($\geq \kappa > 0$) versehen, isometrisch in einen Euklidischen Raum \mathbb{R}^N einbetten (nach Nash) und diesen durch eine definierbare Mannigfaltigkeit M' mit Krümmung $\geq \frac{\kappa}{2}$ approximieren. Betrachte \mathbb{R}^N als Teilraum von $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ in der natürlichen Weise und betrachte die sphärische Projektion auf die Sphäre mit Radius R und Mittelpunkt $P = (0, 0, \dots, 0, R)$. Mit leichten Stetigkeitsargumenten sieht man, daß für genügend großes R die Projektion M'' von M' auf diese Sphäre nach unten durch $\frac{\kappa}{4}$ beschränkte Krümmung hat. Wir wählen R so groß, daß $R^2 \frac{\kappa}{4} > 1$. Dann ist der Kegel C über M'' mit Basispunkt P definierbar und ein

Alexandrovraum mit Krümmung ≥ 0 (siehe [B-G-P92], Proposition 4.2.3.). Andererseits ist die lokale Eulercharakteristik von C bei P gegeben durch $\chi_{lok}(C, P) = 1 - \chi(M'') = 1 - \chi(CP^2) = -2$. Die lokale Eulercharakteristik einer topologischen Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand) ist in jedem Punkt $-1, 0$ oder 1 . Also ist der konstruierte Alexandrovraum C keine topologische Mannigfaltigkeit. \square

3.2.2 Straten höchster Dimension

Aus Lemma 1.9 entnehmen wir, daß das Skalarkrümmungsmaß auf X^m nichts anderes als das Integral über die gewöhnliche Skalarkrümmung ist. Die Alexandrovbedingung in glatten Punkten (für ein gegebenes κ) ist äquivalent zur Bedingung, daß die Schnittkrümmung K nach unten durch κ beschränkt ist. Aus $K \geq \kappa$ folgt $s \geq \kappa m(m-1)$. Daraus folgt sofort:

Satz 3.7. *Sei S wie immer ein abgeschlossener, zusammenhängender, definierbarer Alexandrovraum mit nach unten durch κ beschränkter Krümmung. Dann gilt für jedes m -Stratum X^m :*

$$\text{scal}|_{X^m}(S, -) \geq \kappa m(m-1) \text{ vol}|_{X^m}(-)$$

3.2.3 Straten der Kodimension 1

Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in Abschnitt 1.4.2.

Zunächst nehmen wir an, daß wir ein $m-1$ -Stratum X^{m-1} gegeben haben, welches auf dem Rand genau zweier m -Straten liegt.

Wähle einen festen Punkt $P \in X^{m-1}$. Auf $T := T_P X^{m-1}$ kann man ein orthonormales Koordinatensystem fixieren. Die Exponentialabbildung bildet die Koordinatenlinien auf gewisse Kurven ab, die nach der Bogenlänge parametrisiert sind und in P paarweise orthogonal sind. Indem wir diese Exponentialabbildung als ϕ benutzen, müssen wir zeigen, daß

$$h(P) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \sum_{i=1, \dots, m-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i^2}, w_1 + w_2 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \sum_{i=1, \dots, m-1} x_i''(0), w_1 + w_2 \right\rangle$$

auf X^{m-1} nicht negativ sein kann, falls S ein Alexandrovraum mit Schnittkrümmung $\geq \kappa$ ist.

Wir führen die Berechnungen nur für den Fall $\kappa = 0$ durch, der allgemeine Fall folgt durch leichte Modifikationen (z.B. muß \mathbb{R}^m durch Räume konstanter Schnittkrümmung κ ersetzt werden usw.). Am Ende des Abschnitts geben wir einige Andeutungen für den allgemeinen Fall.

Wir bezeichnen mit T^\perp den Normalenschnitt, d.h. den affinen Raum der Dimension $n - m + 1$, der orthogonal auf T steht und durch P geht. Dann ist $T^\perp \cap S$ (lokal) eine Vereinigung von zwei definierbaren Kurven, die wir nach Bogenlänge parametrisieren. Das liefert uns Funktionen

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0, \epsilon) \mapsto T^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$.

Man beachte, daß γ_1, γ_2 keine definierbaren Funktionen sein müssen, ihr Bild ist aber definierbar. Es gibt also eindeutig bestimmte Tangentenvektoren w_1, w_2 der Länge 1 bei P und es ergibt sich für $\alpha \rightarrow 0$ folgendes asymptotisches Verhalten:

$$\gamma_j(\alpha) = P + \alpha w_j + r_j(\alpha)$$

Dabei ist r_j irgendeine Funktion, so daß $h_j(\alpha) := \frac{\|r_j(\alpha)\|}{\alpha}$ für $\alpha \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Es folgt

$$\gamma_j(\alpha) = P + \alpha w_j + O(\alpha h_j(\alpha)) \quad (3.1)$$

Dieselbe Beziehung bleibt natürlich erhalten, wenn wir h_j durch eine größere Funktion ersetzen, die immer noch gegen 0 konvergiert. Wir können also ohne Einschränkung zusätzlich annehmen, daß h_j monoton fallend für $\alpha \rightarrow 0$ ist und daß $h_j(\alpha) \geq \alpha^2$. Diese technischen Details brauchen wir später.

Schritt 1:

Zuerst schätzen wir die Winkel $\angle(x_i(s), P, x_j(s))$ für $i \neq j$ nach unten ab.

Wir schreiben

$$x_i(s) = P + s x'_i(0) + \frac{s^2}{2} x''_i(0) + O(s^3)$$

$$x_j(s) = P + s x'_j(0) + \frac{s^2}{2} x''_j(0) + O(s^3)$$

und setzen

$$x'_i := x'_i(0)$$

Da diese Kurven nach der Bogenlänge parametrisiert sind, gilt $\langle x', x'' \rangle = 0$. Weiterhin gilt trivialerweise

$$d(P, x_i(s)) \leq s$$

$$d(P, x_j(s)) \leq s$$

Andererseits ist

$$d(P, x_i(s))^2 \geq d_E(P, x_i(s))^2 = s^2 + O(s^4)$$

also

$$d(P, x_i(s)) \geq s + O(s^2)$$

Wir finden entsprechend $d(P, x_j(s)) \geq s + O(s^2)$. Die dritte Seite des Dreiecks kann durch den Euklidischen Abstand abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} d(x_i(s), x_j(s))^2 &\geq d_E(x_i(s), x_j(s))^2 \\ &= \|s(x'_i(0) - x'_j(0)) + \frac{s^2}{2}(x''_i(0) - x''_j(0)) + O(s^3)\|^2 \\ &= 2s^2 - s^3(\langle x'_i, x''_j \rangle + \langle x'_j, x''_i \rangle) + O(s^4) \end{aligned}$$

Aus dem Kosinussatz folgt sofort

$$\begin{aligned} \cos \angle(x_i(s), P, x_j(s)) &= \frac{d(x_i(s), P)^2 + d(x_j(s), P)^2 - d(x_i(s), x_j(s))^2}{2d(x_i(s), P)d(x_j(s), P)} \\ &\leq \frac{s^2 + s^2 - 2s^2 + s^3(\langle x'_i, x''_j \rangle + \langle x'_j, x''_i \rangle) + O(s^4)}{2(s + O(s^2))(s + O(s^2))} \\ &= \frac{s}{2}(\langle x'_i, x''_j \rangle + \langle x'_j, x''_i \rangle) + O(s^2) \end{aligned}$$

Damit sehen wir daß

$$\angle(x_i(s), P, x_j(s)) \geq \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}(\langle x'_i, x''_j \rangle + \langle x'_j, x''_i \rangle) \pm O(s^2) \quad (3.2)$$

Analog gilt

$$\angle(x_i(-s), P, x_j(s)) \geq \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}(\langle -x'_i, x''_j \rangle + \langle x'_j, x''_i \rangle) \pm O(s^2)$$

Schritt 2:

Das nächste Ziel ist die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Winkel $\angle(x_i(s), P, \gamma_j(\alpha))$ ($i = 1, \dots, m-1, j = 1, 2$). Nach Konstruktion ist γ_j nach Bogenlänge parametrisiert und aus Gleichung 3.1 folgt

$$\alpha - O(\alpha h(\alpha)) \leq d_e(P, \gamma_j(\alpha)) \leq d_i(P, \gamma_j(\alpha)) \leq \alpha$$

Die Abstände zwischen $x_i(s)$ und $\gamma_j(\alpha)$ können nach unten durch den Euklidischen Abstand beschränkt werden:

$$\begin{aligned} d(x_i(s), \gamma_j(\alpha))^2 &\geq d_e(x_i(s), \gamma_j(\alpha))^2 \\ &= \|\gamma_j(\alpha) - P - sx'_i(0) - \frac{s^2}{2}x''_i(0) + \frac{s^3}{6}x'''_i(0) + O(s^4)\|^2 \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt $\gamma_j(\alpha) - P \perp x'_i(0)$. Setzen wir die asymptotische Entwicklung für $\gamma_j(\alpha)$ ein, so sehen wir daß

$$\begin{aligned} d(x_i(s), \gamma_j(\alpha))^2 &\geq \alpha^2 + s^2 - \alpha s^2 \langle w_j, x''_i(0) \rangle + O(\alpha^2 h_j(\alpha)) \\ &\quad + O(s^4) + O(\alpha s^3) + O(\alpha h_j(\alpha) s^2) \end{aligned}$$

Wir setzen $\alpha_j := s^2 h_j(s)^{-\frac{1}{2}} \leq s$. Das ist ein wichtiger Punkt im Beweis, mit anderen Werten von α_j fallen die störenden Terme in der asymptotischen Entwicklungen nicht weg. Bei dieser Wahl von α_j bleiben nur die Terme, die man wirklich braucht.

Es gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{\alpha_j^2 h_j(\alpha_j)}{\alpha_j s^2} = h_j(s)^{-\frac{1}{2}} h_j(\alpha_j) \leq h_j(s)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

und

$$\frac{\alpha_j h_j(\alpha_j) s^2}{\alpha_j s^2} = h_j(\alpha_j) \rightarrow 0$$

Die beiden anderen O -Terme verhalten sich in derselben Weise. Also folgt

$$d(x_i(s), \gamma_j(\alpha_j))^2 \geq \alpha_j^2 + s^2 - \alpha_j s^2 \langle w_j, x''_i(0) \rangle + o(\alpha_j s^2)$$

Mit dem Kosinussatz folgt wieder

$$\begin{aligned} \cos \angle(x_i(s), P, \gamma_j(\alpha_j)) &= \frac{d(x_i(s), P)^2 + d(\gamma_j(\alpha_j), P)^2 - d(x_i(s), \gamma_j(\alpha_j))^2}{2d(x_i(s), P)d(\gamma_j(\alpha_j), P)} \\ &\leq \frac{s^2 + \alpha_j^2 - \alpha_j^2 - s^2 + \alpha_j s^2 \langle w_j, x''_i(0) \rangle + o(\alpha_j s^2)}{2(s + O(s^2))(\alpha_j + O(\alpha_j h_j(\alpha_j)))} \\ &= \frac{s}{2} \langle w_j, x''_i(0) \rangle + o(s) \end{aligned}$$

Wir schließen daraus, daß

$$\angle(x_i(s), P, \gamma_j(\alpha_j)) \geq \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2} \langle w_j, x_i''(0) \rangle + o(s) \quad (3.3)$$

Entsprechende Ungleichungen gelten natürlich auch, wenn man $x_i(s)$ durch $x_i(-s)$ ersetzt.

Schritt 3:

Aus technischen Gründen, die später klar werden, brauchen wir auch noch Abschätzungen für die Winkel $\angle(x_i(s), P, x_i(-s))$ und $\angle(\gamma_1(\alpha_1), P, \gamma_2(\alpha_2))$.

Es gilt

$$\cos \angle(x_i(s), P, x_i(-s)) = -1 + o(1)$$

Dabei bezeichnet $o(1)$ einen Term, der für $s \rightarrow 0$ gegen 0 strebt.

Es folgt

$$\angle(x_i(s), P, x_i(-s)) = \pi + o(1) \quad (3.4)$$

Der Beweis dafür ist ähnlich den Beweisen in den Schritten 1 und 2: Anwenden des Kosinussatzes und Abschätzen der Abstände $d(x_i(s), x_i(-s))$ durch die Euklidischen Abstände.

Analog haben wir

$$\angle(\gamma_1(\alpha_1), P, \gamma_2(\alpha_2)) = \pi + o(1) \quad (3.5)$$

Das sieht man ohne Probleme, wenn man die Abstände $\gamma_1(\alpha_1)$ und $\gamma_2(\alpha_2)$ nach oben durch die Summe der beiden Euklidischen Abstände $d_E(\gamma_1(\alpha_1), X^{m-1})$ sowie $d_E(\gamma_2(\alpha_2), X^{m-1})$ abschätzt. Beide Terme verhalten sich asymptotisch wie α_1 bzw. α_2 . Der Rest folgt aus dem Kosinussatz.

Lemma 3.8. *Gegeben seien $2m$ Punkte $(A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_m, B_m)$ auf der Einheitssphäre S^{m-1} . Wir nehmen an, daß*

- $d(A_i, A_j), d(B_i, B_j) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon$ für $i \neq j$
- $d(A_i, B_j) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon$ für alle $i \neq j$
- $d(A_i, B_i) \geq \pi - \epsilon$

Dann gilt

- $d(A_i, A_j), d(B_i, B_j) \leq \frac{\pi}{2} + 2\epsilon$ für $i \neq j$

- $d(A_i, B_j) \leq \frac{\pi}{2} + 2\epsilon$ für alle $i \neq j$.

Beweis: Sei A'_i der diametral zu A_i gelegene Punkt. Dann ist $d(B_i, A'_i) \leq \epsilon$ und damit

$$d(A_j, B_i) \leq d(A_j, A'_i) + d(A'_i, B_i) \leq \pi - d(A_j, A_i) + \epsilon \leq \frac{\pi}{2} + 2\epsilon$$

Die anderen Ungleichungen beweist man auf ähnliche Weise. \square

Lemma 3.9. Sei $A_m(d_1, \dots, d_{\binom{m}{2}})$ das $m - 1$ -dimensionale Volumen eines m -Simplexes auf der Einheitssphäre S^{m-1} mit Seitenlängen $d_1, \dots, d_{\binom{m}{2}}$. Dann gilt

$$k_m := \frac{\partial}{\partial d_i} A(d_1, \dots, d_{\binom{m}{2}}) \Big|_{(d_1 = \dots = d_{\binom{m}{2}} = \frac{\pi}{2})} > 0$$

Beweis:

Es gilt folgende Gleichung:

$$A_m\left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, d_1, \dots, d_{\binom{m-1}{2}}\right) = \frac{s_{m-1}}{2s_{m-2}} A_{m-1}(d_1, \dots, d_{\binom{m-1}{2}})$$

Deswegen ist

$$k_m = \frac{s_{m-1}}{2s_{m-2}} k_{m-1}$$

Induktiv zeigt man dann, daß

$$k_m = \frac{s_{m-1}}{2^{m-1}\pi} > 0$$

\square

Dieses Lemma soll in unserer Situation angewendet werden. Nach [B-G-P92] gibt es eine Abbildung $\Phi : S \mapsto \mathbb{R}^m$ (die nicht notwendigerweise stetig sein muß), die die Abstände von P aus invariant läßt und die anderen Abstände nicht verkleinert. Die Bildpunkte bezeichnen wir mit $\tilde{P}, \tilde{A}, \dots$. Der Strahl, der von \tilde{P} ausgeht und durch \tilde{A} geht, schneidet die Sphäre S^{m-1} in genau einem Punkt \overline{A} . Es gilt

$$\angle(\overline{A}, \tilde{P}, \overline{B}) = \angle(\tilde{A}, \tilde{P}, \tilde{B}) \geq \angle(A, P, B)$$

Wir setzen $A_1 = \overline{\gamma_1(\alpha_1)}, B_1 = \overline{\gamma_2(\alpha_2)}, A_2 = \overline{x_1(s)}, B_2 = \overline{x_1(-s)}, \dots, A_m = \overline{x_{m-1}(s)}, B_m = \overline{x_{m-1}(-s)}$ (zur Erinnerung: $\alpha_j = \alpha_j(s)$).

Wir wählen $\epsilon > 0$ genügend klein so daß die Funktion „ $m - 1$ -Volumen eines m -Simplexes auf der Sphäre“ monoton wachsend in den Seitenlängen ist, wenn diese im Intervall $(\frac{\pi}{2} - 2\epsilon, \frac{\pi}{2} + 2\epsilon)$ liegen. Aus den Ungleichungen 3.2, 3.3, 3.4 und 3.5 schlußfolgern wir, daß die Voraussetzungen des Lemmas 3.8 für genügend kleine s erfüllt sind. Wir betrachten die 2^m m -Simplizes, welche nicht gleichzeitig A_i und B_i für ein festes i als Ecke haben. Nach Lemma 3.8 sind alle Seitenlängen im Intervall $(\frac{\pi}{2} - 2\epsilon, \frac{\pi}{2} + 2\epsilon)$ und dort ist die Volumenfunktion monoton wachsend. Die Summe der entsprechenden Volumen der 2^m Simplizes ist genau dem Volumen der $m - 1$ -Sphäre, s_{m-1} , da sie eine Partition der Sphäre bilden.

Sei

$$\Psi(x_1(\pm s), \dots, x_{m-1}(\pm s), \gamma_{1,2}(\alpha_{1,2}))$$

das Volumen eines Simplexes auf S^{m-1} , dessen Seitenlängen gleich den Winkeln der Punkte $(x_1(\pm s), \dots, x_{m-1}(\pm s), \gamma_{1,2}(\alpha_{1,2}))$ mit P sind. Dann gilt

$$\sum \Psi(x_1(\pm s), \dots, x_{m-1}(\pm s), \gamma_{1,2}(\alpha)) \leq s_{m-1}$$

weil die Winkel bei \tilde{P} zwischen den Bildpunkten $A_1 = \overline{\gamma_1(\alpha_1)}, B_1 = \overline{\gamma_2(\alpha_2)}, A_2 = \overline{x_1(s)}, B_2 = \overline{x_1(-s)}, \dots, A_m = \overline{x_{m-1}(s)}, B_m = \overline{x_{m-1}(-s)}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel zwischen den Originalpunkten und weil die Volumenfunktion monoton wachsend ist.

Wir berechnen $\Psi(x_1(s), \dots, x_{m-1}(s), \gamma_1(\alpha_1))$:

$$\begin{aligned} & \Psi(x_1(s), \dots, x_{m-1}(s), \gamma_1(\alpha_1)) \\ &= A_m(\angle(x_1(s), P, x_2(s)), \angle(x_1(s), P, x_3(s)), \dots, \angle(x_1(s), P, \gamma_1(\alpha_1)), \dots) \\ &\geq A_m\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}(\langle x'_1, x''_2 \rangle + \langle x'_2, x''_1 \rangle) \pm O(s^2), \dots, \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}\langle w_1, x''_1(0) \rangle + o(s), \dots\right) \\ &= A_m\left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right) - k_m \frac{s}{2}((\langle x'_1, x''_2 \rangle + \langle x'_2, x''_1 \rangle + \dots + \langle w_1, x''_1(0) \rangle) + \dots) + o(s) \end{aligned}$$

Ähnliche Ungleichungen gelten für die anderen Kombinationen (erstze $x(s)$ durch $x(-s)$ oder $\gamma_1(\alpha_2)$ durch $\gamma_1(\alpha_1)$).

Wir nehmen die Summe all dieser Ungleichungen. Dabei fallen Terme der Form $\langle x'_1, x''_2 \rangle$ weg und es bleibt

$$\begin{aligned}
s_{m-1} &\geq \sum \Psi(x_1(\pm s), \dots, x_{m-1}(\pm s), \gamma_{1,2}(\alpha_{1,2})) \\
&\geq 2^m A_m\left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right) - \sum k_m \frac{s}{2} (\langle w_{1,2}, x_1''(0) \rangle + \dots) + o(s) \\
&= s_{m-1} - 2^{m-2} k_m s (\langle w_1 + w_2, x_1''(0) \rangle + \dots) + o(s)
\end{aligned}$$

Für $s \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{m-1} \langle w_1 + w_2, x_i''(0) \rangle \geq 0$$

Dieser Term ist bis auf den konstanten Faktor $2\pi > 0$ gerade der Term, über den integriert werden muß, wenn man $\Lambda_{m-2}(S, -)$ auf dem Stratum X^{m-1} berechnet. Deshalb sind $\Lambda_{m-2}|_{X^{m-1}}$ und $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}}$ nichtnegative Maße.

Bemerkung: Wir haben die Berechnungen nur für $\kappa = 0$ durchgeführt und wollen jetzt andeuten, welche Änderungen im Falle $\kappa \neq 0$ nötig sind. Zunächst muß der Kosinussatz durch die entsprechende Version in Räumen mit konstanter Schnittkrümmung κ ersetzt werden. Die asymptotischen Entwicklungen der betrachteten Winkel sind die gleichen. Das ist nicht sehr überraschend, da beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten asymptotisch isometrisch zum Euklidischen Raum sind.

Die Abbildung Φ liefert Punkte in H_κ^m . Sie können mit \tilde{P} durch Geodätische verbunden werden. Die Winkel zwischen diesen Geodätischen sind genau die Winkel zwischen den betroffenen Punkten, da wir in einem Raum konstanter Krümmung sind. Im Tangentialraum $T_{\tilde{P}}H_\kappa^m$, welcher isometrisch zu \mathbb{R}^m ist, liegen die Tangenten dieser Geodätischen. Die Winkel zwischen ihnen sind wieder nach den gleichen Formeln nach unten beschränkt wie im Fall $\kappa = 0$. Identifiziert man einen Tangentenvektor mit einem Punkt auf der Sphäre, so kann man wieder das Lemma 3.9 anwenden.

Alternativ könnte man anstelle von $\Phi : S \mapsto H_\kappa^m$ die Abbildung $\exp_{\tilde{P}}^{-1} \circ \Phi : S \mapsto T_{\tilde{P}}H_\kappa^m = \mathbb{R}^m$ nehmen. Dann funktioniert die gleiche Argumentation wie im Fall $\kappa = 0$.

Wir haben also gezeigt:

Satz 3.10. *Sei S ein (abgeschlossener, zusammenhängender und definierbarer) Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ und X^{m-1} ein Stratum, welches auf dem Rand von genau zwei m -Straten liegt, dann gilt*

$$\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}} \geq 0$$

Korollar 3.11. *Sei S ein (abgeschlossener, zusammenhängender und definierbarer) Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ und X^{m-1} ein Stratum, welches auf dem Rand von genau einem m -Stratum liegt, dann gilt*

$$\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}} \geq 0$$

Beweis des Korollars: Der Normalenschnitt $(T_P X^{m-1})^\perp \cap S$ besteht nun aus genau einer Kurve mit Richtung w . Um $\text{scal}(S, -)$ auf X^{m-1} zu berechnen, müssen wir über den Ausdruck $2 \sum_{i=1}^{m-1} \langle w, x_i''(0) \rangle$ integrieren (Theorem 2.7).

Nach Lemma 3.5 sind alle Punkte dieses Stratum Randpunkte. Wir können zwei Kopien von S entlang dem Rand verkleben und erhalten erneut einen Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$. Das folgt aus dem „doubling theorem“ aus [B-G-P92]. Das Stratum X^{m-1} wird dann zu einem Stratum auf dem Rand von genau zwei m -Straten. Jetzt folgt aus Satz 3.10, daß $\sum_{i=1}^{m-1} \langle w, x_i''(0) \rangle \geq 0$ gilt. Also ist $\text{scal}(S, -) \geq 0$ auf X^{m-1} . \square

3.2.4 Die Dichte von Alexandrovräumen

Satz 3.12. *Sei M ein Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ und Dimension m , $P \in S$. Wir bezeichnen das m -dimensionale Hausdorff-Maß mit vol . Dann existiert die Dichte $\theta(S, P) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol} B_i(P, r)}{b_m r^m}$, ist positiv und kleiner oder gleich 1. Ist P ein Randpunkt, so ist sie kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$.*

Bemerkung: Dieser Satz wurde in [Shen93] bewiesen. Dort findet man auch genauere Aussagen über die Dichte in Alexandrovräumen. Grob gesagt gilt: Ist die Dichte in jedem Punkt groß, so muß der Raum sehr regulär sein. Wir skizzieren den Beweis des Satzes:

Beweis des Satzes: 1. Fall: $\kappa = 0$

Wir setzen

$$M_r := M \cap B(P, r)$$

und müssen zeigen, daß $\frac{\text{vol}_m M_r}{r^m}$ einen Grenzwert für $r \rightarrow 0$ besitzt.

Behauptung: Ist $r' < r$, so ist $\frac{\text{vol}_m M_{r'}}{r'^m} \geq \frac{\text{vol}_m M_r}{r^m}$.

Um die Behauptung zu zeigen, wähle zu jedem Punkt $Q \in B(P, r) \cap M$ eine Geodätische γ_Q zwischen P und Q in M . Sie wird nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\gamma_Q(0) = P$. Definiere die Funktion $h : B(P, r) \cap M \mapsto B(P, r') \cap M$ durch

$$h(Q) := \gamma_Q \left(\frac{r'}{r} d(P, Q) \right)$$

Nach der Alexandrovungleichung gilt für alle $Q, Q' \in B(P, r)$

$$d(h(Q), h(Q')) \geq \frac{r'}{r} d(Q, Q')$$

Daraus folgt die Behauptung.

Nach [B-G-P92], Theorem 10.2. gilt aber auch $\text{vol}_m M_r \leq b_m r^m$. Demnach ist die Funktion $\frac{\text{vol}_m M_r}{b_m r^m}$ für fallende r monoton wachsend und durch 1 beschränkt, besitzt also einen Grenzwert ≤ 1 und > 0 .

2. Fall: $\kappa \neq 0$ Man geht zunächst genauso vor wie im Fall $\kappa = 0$. Die Alexandrovungleichung muß jetzt aber für H_κ^2 angewendet werden. Da H_κ^2 lokal fast isometrisch (d.h. Lipschitz-äquivalent mit Lipschitz-Konstante nahe bei 1) zu \mathbb{R}^2 ist, folgt für alle $Q, Q' \in B(P, r) \cap M$

$$d(h(Q), h(Q')) \geq (1 - \epsilon(r)) \frac{r'}{r} d(Q, Q')$$

mit einer Funktion $\epsilon > 0$, die für r gegen 0 auch gegen 0 geht. Daraus folgt wieder leicht die Existenz eines Grenzwertes ≤ 1

Ist P ein Randpunkt, so können wir zwei Kopien von M entlang des Randes verkleben und erhalten erneut einen Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ ([B-G-P92], Theorem 13.3 d). Die Dichte in P verdoppelt sich dabei und muß also kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ sein. \square

Korollar 3.13. *Ist S eine kompakte, zusammenhängende definierbare Menge der Dimension m , die bezüglich des inneren Abstandes ein Alexandrovraum nichtnegativer Krümmung ist, so gilt für jeden Punkt $P \in S$ die Ungleichung*

$$\frac{\text{vol } S}{b_m (\text{diam } S)^m} \leq \theta(S, P) \leq 1$$

Beweis: trivial, folgt aus der im Beweis zu 3.12 gezeigten Behauptung.

3.2.5 Straten der Kodimension 2

Satz 3.14. *Sei S ein (abgeschlossener, zusammenhängender und definierbarer) Alexandrovraum mit Krümmung $\geq \kappa$ und Dimension m , X^{m-2} ein Stratum der Dimension $m - 2$. Dann ist $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}} \geq 0$*

Beweis: Sei $P \in X^{m-2}$. Wir benutzen Lemma 3.6. Der Term, den wir integrieren müssen, um $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}}$ zu berechnen, ist nach Theorem 2.7, Abschnitt 1.4.3 und Satz 2.2 gegeben durch den Ausdruck

$$4\pi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\chi_{lok} \left((T_P X^{m-2})^\perp \cap S, P \right)}{2} - \theta(S, P) \right\}$$

Ist $\chi_{lok} = 1$, so ist der Term gleich $1 - \theta \geq 0$ nach Satz 3.12.

Ist $\chi_{lok} = 0$ und P ein Randpunkt, so ist die zu integrierende Größe gegeben durch $\frac{1}{2} - \theta(S, P) \geq 0$.

In jedem Fall wird über eine nichtnegative Größe integriert, woraus Satz 3.14 folgt. \square

Kapitel 4

Das Haupttheorem für definierbare Räume mit $K \leq \kappa$

Mit Blick auf Theorem 3.3 stellt sich natürlich die Frage, ob ein analoges Theorem auch für nach oben beschränkte Krümmung richtig ist. Dazu muß zunächst geklärt werden, wann ein metrischer Raum eine nach oben beschränkte Schnittkrümmung hat. Dazu gibt es ein ganzes Buch, [Bri99], auf das wir uns im folgenden beziehen werden.

Das Haupttheorem dieses Kapitels ist folgendes Theorem:

Theorem 4.1. *Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende, definierbare Menge der Dimension m . Wir setzen voraus, daß für eine Stratifikation von S jedes $m - 1$ -Stratum auf dem Rand von genau zwei m -Straten liegt und daß S bezüglich der inneren Metrik ein Raum mit nach oben durch κ beschränkter Krümmung ist. Dann gilt*

$$\text{scal}(S, -) \leq \kappa m(m - 1) \text{vol}(S, -)$$

d.h. für jede Borelmenge $U \subseteq S$ gilt $\text{scal}(S, U) \leq \kappa m(m - 1) \text{vol}(U)$.

Bemerkungen:

- Man sieht beispielsweise an einem abgeschlossenen Ball im Euklidischen Raum, daß das Theorem im allgemeinen nicht gültig ist, falls es ein $m - 1$ -Stratum gibt, welches auf dem Rand nur eines m -Stratums liegt.
- Die Bedingung an die $m - 1$ -Straten hängt nicht von der gewählten Stratifikation ab. Man kann diese Bedingung auch so formulieren, daß die Menge der Punkte $P \in S$, in deren Nähe S eine topologische Mannigfaltigkeit ist, Kodimension mindestens 2 hat. Das ist z.B. der Fall, wenn S eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

- Die obige Bedingung ist noch relativ stark, hier sind eventuell Verbesserungen möglich. Die Vermutung, daß das Theorem seine Richtigkeit behält, wenn man nur noch fordert, daß jedes $m - 1$ -Stratum auf dem Rand von mindestens zwei m -Straten liegt, erweist sich als falsch. Allerdings ist unter dieser schwächeren Voraussetzung die Einschränkung von scal auf Straten der Kodimension 0 oder 1 immer noch ein nichtpositives Maß, erst in Kodimension 2 kann es Probleme geben.

Beweis des Theorems: Es kann wieder stratenweise vorgegangen werden, wobei nur Straten der Dimensionen m , $m - 1$ und $m - 2$ einen Beitrag zu Λ_{m-2} liefern. Für m -Straten folgt die Aussage mit der gleichen Argumentation wie bei den Alexandrovräumen. Für $m - 1$ und $m - 2$ - Straten folgt sie aus den Sätzen 4.11 und 4.6. \square

Korollar 4.2. *Gegeben sei eine Analytisch-Geometrische Kategorie \mathcal{C} . Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende \mathcal{C} -Menge der Dimension m mit einer festen Metrik. Wir setzen voraus, daß für eine Stratifikation von S jedes $m - 1$ -Stratum auf dem Rand von genau zwei m -Straten liegt. Falls S ein Raum mit nach oben durch $\leq \kappa$ beschränkter Krümmung ist, so gilt*

$$\text{scal}(S, -) \leq \kappa m(m - 1) \text{vol}(S, -)$$

d.h. für jede Borelmenge $U \subset S$ gilt $\text{scal}(S, U) \geq \kappa m(m - 1) \text{vol}(U)$.

Beweis des Korollars: Der Beweis erfolgt analog wie der Beweis des Korollars zum Haupttheorem über definierbare Alexandrovräume. \square

Bevor wir zu den Details des Beweises des Theorems kommen, wollen wir ihn mit der analogen Aussage für Alexandrovräume vergleichen.

Bei definierbaren Alexandrovräumen folgen aus der Alexandrovungleichung sofort starke Einschränkungen an die Topologie der Menge, während man bei Räumen mit nach oben beschränkter Krümmung eine Bedingung an die Topologie voraussetzen muß. Diese Bedingung wird auf zwei Weisen benutzt: einerseits folgt aus ihr, daß Geodätische durch $m - 1$ -Straten hindurch auf geeignete Weise verlängert werden können. Andererseits erhält man Informationen über die Struktur der Normalenschnitte in Kodimension 2, die ausreichen, um die Dichte und die Eulercharakteristik abzuschätzen.

Der Beweis für die Straten höchster Dimension läuft in beiden Fällen analog. Hier kommt zum Tragen, daß in glatten Punkten die metrischen Krümmungsbedingungen mit den differentiellen Krümmungsbedingungen übereinstimmen und daß das skalare Krümmungsmaß im wesentlichen dasselbe ist wie die skalare Krümmung.

In Kodimension 1 benötigt man bei Räumen mit nach oben beschränkter Krümmung die Verdierbedingung. Während man bei Alexandrovräumen die

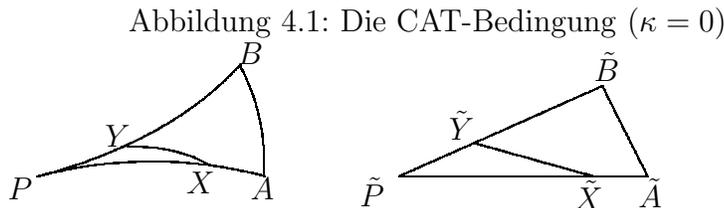
Metrik nach unten abschätzte, was durch die Euklidische Metrik des umgebenden Raumes geschah, braucht man hier Abschätzungen nach oben, die man durch konkrete Angabe von Wegen erhält. Das ist jedoch etwas schwieriger und die zusätzliche Information der Verdierbedingung muß eingesetzt werden.

Dagegen ist der Beweis für Straten der Kodimension 2 bei Räumen mit nach oben beschränkter Krümmung sogar einfacher als bei Alexandrovräumen. Man benutzt die Querschnittsformel 2.6 nicht, sondern zeigt direkt, daß die Dichte des Querschnitts größer oder gleich 1 ist. Dazu werden topologische Argumente und Sätze über Räume mit nach oben beschränkter Krümmung herangezogen.

4.1 Räume mit nach oben beschränkter Krümmung

In diesem Abschnitt definieren wir Räume mit nach oben beschränkter Krümmung und geben die Eigenschaften an, die wir später verwenden werden. Alle diese Definitionen und Sätze können in dem Buch [Bri99] nachgelesen werden.

Definition 4.3. *Ein geodätisches Dreieck in einem intrinsischen metrischen Raum besteht aus drei Punkten P, A, B und geodätischen Segmenten $[P, A]$, $[P, B]$ und $[A, B]$ zwischen ihnen. Wir sagen, daß es die $CAT(\kappa)$ -Ungleichung erfüllt, wenn für alle Punkte $X \in [P, A]$ und $Y \in [P, B]$ die Ungleichung $d(X, Y) \leq d(\tilde{X}, \tilde{Y})$ gilt, wobei \tilde{X} und \tilde{Y} Punkte auf den Seiten $[\tilde{P}, \tilde{A}]$ bzw. $[\tilde{P}, \tilde{B}]$ eines Vergleichsdreiecks $\tilde{P}, \tilde{A}, \tilde{B}$ in M_κ sind, die durch die Gleichungen $d(\tilde{P}, \tilde{X}) = d(P, X)$, $d(\tilde{P}, \tilde{Y}) = d(P, Y)$ definiert sind. Siehe Abbildung 4.1.*



Ein metrischer Raum heißt d -geodätisch, wenn alle Paare von Punkten mit Abstand kleiner als d durch eine (nicht notwendig eindeutige) Geodätische verbunden werden können.

Wir bezeichnen mit D_κ den Durchmesser einer Raumform mit konstanter Krümmung κ , also $D_\kappa = \infty$ für $\kappa \leq 0$ und $D_\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für $\kappa > 0$.

Definition 4.4. a) *Ein intrinsischer metrischer Raum X heißt $CAT(\kappa)$ -Raum, wenn er D_κ -geodätisch ist und wenn alle geodätischen Dreiecke mit Umfang kleiner als $2D_\kappa$ die $CAT(\kappa)$ -Ungleichung erfüllen.*

b) *Ein intrinsischer metrischer Raum X heißt Raum mit Krümmung $\leq \kappa$, wenn er lokal ein $CAT(\kappa)$ -Raum ist.*

Bemerkungen:

- Die Buchstaben C,A,T stehen für Cartan, Alexandrov und Toponogov, die sich alle mit Räumen mit nach oben beschränkter Krümmung beschäftigt haben.
- Wir folgen hier den Bezeichnungen aus [Bri99]: CAT-Räume sind Räume, in denen die CAT-Ungleichung global gilt, Räume mit nach oben beschränkter Krümmung sind solche, in denen sie lokal gilt. CAT(0)-Räume bezeichnet man auch als Hadamardräume.

Die nächsten Sätze stammen aus [Bri99]. Wir werden sie im Beweis des Haupttheorems benötigen.

Satz 4.5. *Sei X ein CAT(κ)-Raum. Dann gilt:*

- *Der Alexandrowinkel zwischen den Seiten eines geodätischen Dreiecks in X mit verschiedenen Ecken ist nicht größer als der Winkel zwischen den entsprechenden Seiten eines Vergleichsdreiecks in M_κ^2 .*
- *Jede lokale Geodätische in X mit Länge höchstens D_κ ist eine Geodätische.*
- *Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit, so kann jede Geodätische $\gamma : [a, b] \mapsto X$ zu einer Geodätischen $\gamma : [a - \epsilon, b + \epsilon] \mapsto X, \epsilon > 0$ verlängert werden. Falls X vollständig ist, so folgt, daß jede Geodätische zu einer Geodätischen der Länge D_κ verlängert werden kann.*
- *Allgemeiner gilt: Ist für $P \in X$ und kleine Radien $r > 0$ der „gepunktete Ball“ $B(P, r) \setminus \{P\}$ nicht kontrahierbar, so läßt sich jede Geodätische mit Endpunkt P über P hinaus fortsetzen.*

4.2 Beweis des Theorems

4.2.1 Straten der Kodimension 2

Satz 4.6. *Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende, definierbare Menge der Dimension m . Wir nehmen an, daß jedes $m - 1$ -Stratum auf dem Rand von genau zwei m -Straten liegt und daß S ein Raum mit Krümmung $\leq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$ ist. Dann gilt $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}} \leq 0$ für jedes $m - 2$ -Stratum X^{m-2} .*

Beweis: Angesichts der Abschnitte 2.4 und 2.1 sowie Thom's Isotopielemma müssen wir zeigen, daß die Dichte des Normalenschnittes $S_P := (T_P X^{m-2})^\perp \cap S$

bei P nicht kleiner als 1 ist für fast jeden Punkt $P \in X^{m-2}$, denn $\chi_{lok}(S_P, P) = 1$.

Schritt 1: Wir halten einen solchen Punkt P fest. Eine Umgebung U_P von P in S_P liegt in einer Tubenumgebung um X^{m-2} , was impliziert, daß für jeden Punkt A in $S_P \cap U_P$ der Euklidische Abstand zwischen A und X^{m-2} gleich dem Euklidischen Abstand zwischen A und P ist.

Nach Thom's Isotopielemma und nach Voraussetzung an die $m - 1$ -Straten bestehen die Mengen $S_\epsilon(P, r) \cap S_P$ für kleine r aus einer disjunkten Vereinigung (topologischer) Kreise $K_1(r), K_2(r), \dots, K_k(r)$. Deren Längen seien $l_1(r), l_2(r), \dots, l_k(r)$. Wir wählen die Numerierung so, daß für jedes r der Kreis $K_1(r)$ die maximale Länge hat. Nach Abschnitt 2.1 ist die Dichte von S_P bei P gegeben durch

$$\theta(S_P, P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^k l_i(r)}{2\pi r}$$

Wir werden die Aussage

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{l_1(r)}{2\pi r} \geq 1$$

beweisen, woraus sofort $\theta(S_P, P) \geq 1$ folgt.

Angenommen, diese Ungleichung gilt nicht.

Wir wählen reelle Zahlen θ', ϵ mit $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{l_1(r)}{2\pi r} < \theta' < 1$ und $\epsilon > 0$. Für genügend kleine reelle $r > 0$ sind die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- a) $K_1(r)$ liegt in einer Tubenumgebung von X^{m-2} .
- b) $0 < l_1(r) \leq 2\pi r \theta'$

Schritt 2:

Behauptung: Es gibt beliebig kleine reelle Zahlen $r > 0$ und Punkte $A, B \in K_1(r)$ mit der Eigenschaft, daß die Geodätische zwischen A und B einen Punkt P' aus X^{m-2} enthält.

Um die Behauptung zu beweisen, benötigen wir ein topologisches Argument.

Wähle einen Homöomorphismus

$$\phi : S^1 = \{z \in C : |z| = 1\} \mapsto K_1(r)$$

Wir werden ϕ zu einer stetigen Abbildung

$$\bar{\phi} : B^2 = \{z \in C : |z| \leq 1\} \mapsto S$$

fortsetzen. Wähle dazu einen festen Punkt $A \in K_1(r)$. Dann liegt $A' := \phi^{-1}(A) \in S^1$ und jeder Punkt C' in B^2 kann in der Form

$$C' = A' + t(B' - A')$$

mit $0 \leq t \leq 1$ und $B' \in S^1$ dargestellt werden. Für $C' \neq A'$ ist diese Darstellung sogar eindeutig.

Setze $B := \phi(B')$. Die eindeutig bestimmte Geodätische zwischen A und B bezeichnen wir mit $\gamma_{A,B}$.

Dann definieren wir

$$\bar{\phi}(C') := \gamma_{A,B}(td_i(A, B))$$

Da in $\text{CAT}(\kappa)$ -Räumen Geodätische der Länge kleiner als D_k stetig von ihren Endpunkten abhängen (siehe [Bri99]), ist $\bar{\phi}$ eine stetige Abbildung.

Wäre die Behauptung falsch, so wäre $\bar{\phi}$ eine stetige Abbildung von B^2 nach $S \setminus X^{m-2}$. Das Bild von B^2 unter dieser Abbildung liegt für genügend kleine r in der Umgebung U_P (Dreiecksungleichung). Also ist die Schleife $K_1(r)$ kontrahierbar in $(S \setminus X^{m-2}) \cap U_P$.

Andererseits kann $K_1(r)$ nicht kontrahierbar in $S_P \setminus \{P\}$ sein, da $S_P \setminus \{P\}$ wegen der lokalen Kegelstruktur definierbarer Mengen (siehe [B-C-R87]) homotop zur Vereinigung der Kreise $K_1(r), \dots, K_k(r)$ ist und $K_1(r)$ innerhalb dieser Vereinigung trivialerweise nicht kontrahierbar ist.

Nach Thom's Isotopielemma ist die Menge $(S \setminus X^{m-2}, P)$ lokal homöomorph zu $((S_P \setminus \{P\}) \times \mathbb{R}^{m-2}, P)$. Damit ist $K_1(r)$ nicht kontrahierbar in $(S \setminus X^{m-2}) \cap U_P$.

Das ist ein Widerspruch zur oben gezeigten Tatsache, daß $K_1(r)$ in $S \setminus X^{m-2} \cap U_P$ kontrahierbar ist. Die Annahme, daß $\bar{\phi}$ eine Abbildung nach $S \setminus X^{m-2}$ ist, muß fallengelassen werden und somit gibt es einen Punkt $P' \in X^{m-2}$, der im Bild von $\bar{\phi}$ und damit auf einer Geodätischen zwischen zwei Punkten von $K_1(r)$ liegt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Schritt 3: Als nächstes wählen wir ein genügend kleines r und Punkte A, B wie in der Behauptung. Die Geodätische γ zwischen A und B enthält einen (nicht notwendigerweise eindeutigen) Punkt $P' \in X^{m-2}$.

Die Länge der Kurve $K_1(r)$ ist nach oben durch $2\pi r\theta'$ beschränkt. Da sie homöomorph zu einem Kreis ist, hat einer der beiden Bögen zwischen A und B eine Länge kleiner oder gleich $\pi r\theta'$. Wir bezeichnen ihn mit β . Jeder Punkt von β hat zu P den Euklidischen Abstand r .

Die Kurve β liegt in einer Tubenumgebung von X^{m-2} und im Normalenschnitt zu P . Daraus folgt, daß jeder Punkt von β zu P' einen Euklidischen Abstand

von mindestens r hat, also ist auch der innere Abstand zwischen P' und β mindestens r .

Nimm eine Folge von Punkten $A = P_0, P_1, \dots, P_k = B$ auf β so daß

$$d_i(P_j, P_{j+1}) < \epsilon, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

und

$$\sum_{j=0}^{k-1} d_i(P_j, P_{j+1}) \leq l(\beta) \leq \pi r \theta'$$

gilt. Sei γ_j die Geodätische zwischen P_j und P' . Aus der CAT-Ungleichung und der Dreiecksungleichung für Winkel schließen wir

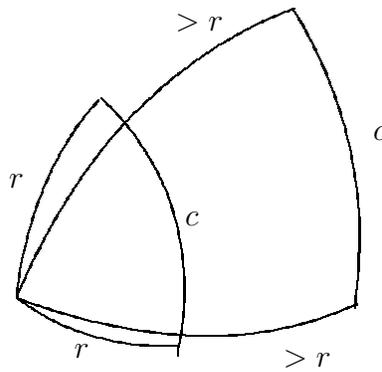
$$\angle_{P'}(\gamma_0, \gamma_k) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \angle_{P'}(\gamma_j, \gamma_{j+1}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \angle(P_j, P', P_{j+1})$$

Mit $l_\kappa(r)$ bezeichnen wir die Länge eines Kreises mit Radius r in M_κ^2 .

Um die Winkel $\angle(P_j, P', P_{j+1})$ abzuschätzen, bemerken wir, daß nach Konstruktion $d_i(P_j, P') \geq r$ gilt.

Unter allen geodätischen Dreiecken auf M_κ^2 mit zwei Seitenlängen zwischen r und $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ (bzw. zwischen r und ∞ für $\kappa \leq 0$) und fester dritter Seitenlänge hat dasjenige den größten Winkel zwischen den zwei veränderlichen Seiten, bei dem diese Seitenlängen genau r betragen (siehe Abbildung 4.2).

Abbildung 4.2: Monotonie des Winkels



Es folgt, daß der entsprechende Winkel $\angle(P_j, P', P_{j+1})$ nicht größer als der zugehörige Winkel im Vergleichsraum M_κ^2 eines Vergleichsdreiecks mit Seitenlängen $r, r, d_i(P_j, P_{j+1})$ ist. Letzterer ist beschränkt durch $\psi(\epsilon)2\pi \frac{d_i(P_j, P_{j+1})}{l_\kappa(r)}$ wobei $\psi(\epsilon)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 1 geht (Taylorentwicklung des κ -Kosinus).

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi = \angle_{P'}(\gamma_0, \gamma_k) &\leq \sum_j \angle(P_j, P', P_{j+1}) \leq \\ &\leq \psi(\epsilon) \frac{2\pi}{l_\kappa(r)} \sum_j d_i(P_j, P_{j+1}) \leq \psi(\epsilon) \frac{2\pi r}{l_\kappa(r)} \pi \theta'\end{aligned}$$

Wenn wir ϵ gegen 0 gehen lassen, bekommen wir

$$\pi \leq \frac{2\pi r}{l_\kappa(r)} \pi \theta'$$

Für $r \rightarrow 0$ strebt die rechte Seite gegen $\pi \theta' < \pi$, das ist ein Widerspruch.

Also ist die Annahme $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{l_1(r)}{2\pi r} < 1$ nicht haltbar, woraus $\theta(S_P, P) \geq 1$ folgt. Der Term, über den man integrieren muß, um $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}}$ zu berechnen, ist gegeben durch $4\pi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\chi_{\text{lok}}(S_P, P)}{2} - \theta(S_P, P) \right\} = 4\pi \{1 - \theta(S_P, P)\} \leq 0$. Es folgt $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}} \leq 0$.

Damit ist der Beweis von Satz 4.6 vollständig. \square

4.2.2 Straten der Kodimension 1, in denen genau zwei m -Straten eintreffen

Sei jetzt X^{m-1} ein Stratum der Kodimension 1, in dem genau zwei m -Straten X_1^m, X_2^m eintreffen.

Wir erinnern daran, daß $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}}$ gegeben ist durch Integration einer definierbaren Funktion h auf X^{m-1} . Um zu zeigen, daß $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}} \leq 0$ ist, reicht es aus zu zeigen, daß $h(P) \leq 0$ auf einer dichten Teilmenge von X^{m-1} gilt. Wir werden diese Ungleichung für alle Punkte $P \in X^{m-1}$ herleiten, für die die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- a) Die Tangentialabbildung kann von X_1^m und X_2^m stetig nach P fortgesetzt werden.
- b) Die Stratifikation erfüllt Verdier's Bedingung in einer Umgebung von P .
- c) Es gibt eine Geodätische durch P , die wie sich wie im Satz 2.14 verhält.

Lemma 4.7. *Sei $S = \cup X^i$ eine zahme Stratifikation von S und X^{m-1} ein Stratum auf dem Rand von genau zwei m -Straten. Dann ist die Menge der Punkte $P \in X^{m-1}$, für die die obigen drei Bedingungen erfüllt sind, eine dichte Teilmenge von X^{m-1} .*

Beweis: Eine dichte Menge minus eine Menge kleinerer Dimension bleibt dicht. Also sind wir mit Hilfe der Sätze 2.10 und 2.14 fertig. \square

Von nun an setzen wir voraus, daß P die drei obigen Bedingungen erfüllt. Wir wollen zeigen, daß $h(P) \leq 0$.

Wir finden eine Geodätische γ , die aus zwei geodätischen Bögen γ_1, γ_2 besteht, so daß γ_k vollständig in X_k^m liegt und so daß

$$\gamma_k(\alpha) = P + \alpha w_k + r_k(\alpha), \quad k = 1, 2$$

für kleine positive α . Dabei ist r_k eine Funktion mit $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r_k(\alpha)}{\alpha} = 0$. Weiterhin gilt $w_k \perp T_P X^{m-1}$ und $\|w_k\| = 1$ (siehe Abschnitt 2.5)

Wähle reelle Funktionen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0, \epsilon_k : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ so daß

a) ϵ_k ist monoton wachsend.

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \epsilon_k(\alpha) = 0$.

c) $\|\frac{r_k(\alpha)}{\alpha}\| \leq \epsilon_k(\alpha)$

Die folgende Konstruktion muß sowohl für X_1^m als auch für X_2^m durchgeführt werden. Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir die Indizes weg. Wir schreiben also γ anstelle von γ_k und so weiter.

Der wohldefinierte Limestangentialraum von X^m in P sei mit T bezeichnet.

Wir wenden Satz 2.11 auf das Stratum X^m und den Punkt P an. Das liefert ein Koordinatensystem $\{x_1, \dots, x_n\}$, eine Menge

$$U = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m > g(x_1, \dots, x_{m-1})\}$$

die wir auch als Teilmenge von \mathbb{R}^n auffassen:

$$U \subset T = \{x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$$

und eine Funktion $f : U \mapsto \mathbb{R}^{n-m}$, so daß X^m der Graph von f ist und die Ableitungen von f gegen 0 gehen, wenn wir uns P annähern.

Für Punkte aus T benutzen wir die verkürzte Schreibweise (a_1, \dots, a_m) anstelle $(a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0)$.

Wir schreiben Π für die orthogonale Projektion von S auf T . In dem gegebenen Koordinatensystem kann f geschrieben werden als $f = (f_1, \dots, f_{n-m})$. Da P in T enthalten ist, gilt $f(0, \dots, 0) = 0$.

Lemma 4.8. *Es gibt eine Konstante $C > 0$ so daß die Ableitungen von f für jedes $j = 1, \dots, n - m$ die folgenden Abschätzungen erfüllen:*

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(Q) \right| \leq C d_e(Q, P), \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Weiterhin gilt

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(Q) \right| \rightarrow 0 \quad \text{for } Q \rightarrow P$$

Beweis: Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die Tangentenabbildung stetig von X^m auf P fortgesetzt werden kann. (siehe Satz 2.11).

Wir skizzieren den Beweis der ersten Behauptung. Es ist eine Konsequenz aus Verdier's Bedingung. Man sieht, daß der Tangentialraum von X^m bei Q als Vektorraum erzeugt wird von den Vektoren

$$(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1}), \dots, (0, \dots, 0, 1, \frac{\partial f_1}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_m})$$

Da die Tangentialräume $T_Q X^m$ für $Q \rightarrow P$ gegen T konvergieren, sehen wir, daß alle Ableitungen gegen 0 konvergieren. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß unter den Vektoren $\frac{\partial f}{\partial x_i}(Q)$, $i = 1, \dots, m$ der erste der längste ist. Wir bezeichnen seine Länge mit $L(Q)$. Wir müssen zeigen, daß $L(Q) \leq Cd_e(P, Q)$ für eine Konstante $C > 0$ ist.

Die Orthogonalprojektion des Vektors $(1, 0, \dots, 0) \in T_P X^{m-1}$ auf $T_Q X^m$ ist gegeben durch

$$(a_1, a_2, \dots, a_m, a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + a_m \frac{\partial f_1}{\partial x_m}, \dots, a_1 \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1} + \dots + a_m \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_m})$$

mit Unbekannten (a_1, \dots, a_m) . Die Orthogonalitätsbedingung liefert ein System linearer Gleichungen für die Unbekannten a_1, \dots, a_m . Es hat die Form

$$(Id_m + o(L))(a_1, \dots, a_m)^T = (1, 0, \dots, 0)^T$$

wobei Id_m die Identitätsmatrix vom Typ (m, m) und $o(L)$ eine Matrix, die schneller gegen 0 geht als L .

Auflösung liefert $a_1 = 1 + o(L)$, $a_2 = o(L)$, \dots , $a_m = o(L)$ wobei $o(L)$ für eine Funktion steht, die schneller gegen 0 geht als L .

Wegen $\Pi_Q^\perp = Id - \Pi_Q$ ist

$$\Pi_Q^\perp(1, 0, \dots, 0) = \left(o(L), o(L), \dots, o(L), -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + o(L), \dots, -\frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1} + o(L) \right)$$

und deshalb

$$\|\Pi_Q^\perp(1, 0, \dots, 0)\| = \left\| \left(0, \dots, 0, -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1} \right) \right\| + o(L) = L + o(L)$$

Aus Verdier's Bedingung folgt, daß das beschränkt ist durch $Cd_e(P, Q)$ für eine Konstante $C > 0$. Da wir bereits wissen, daß L für $Q \rightarrow P$ gegen 0 konvergiert, sehen wir, daß L durch $2Cd_e(P, Q)$ beschränkt ist, sobald Q genügend nahe bei P liegt. Das beweist das Lemma. \square

Jetzt wählen wir eine reelle Funktion $\epsilon_3 : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ so daß:

- a) ϵ_3 ist monoton wachsend.
- b) $\lim_{s \rightarrow 0} \epsilon_3(s) = 0$
- c) Für alle $Q \in B_e(P, s)$ und $j = 1, \dots, n - m$ ist $\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(Q) \right| \leq \epsilon_3(s)$.

Wir erinnern uns daran, daß X^{m-1} auf dem Rand von genau zwei m -Straten liegt. Wir definieren ϵ_4 analog wie ϵ_3 , nur diesmal für das andere m -Stratum.

Die Existenz solcher Funktionen folgt aus der zweiten Behauptung des Lemmas.

Sei s eine positive reelle Zahl, die wir gegen 0 gehen lassen. Setze

- $\epsilon(s) := \max\{s, \epsilon_1(s), \epsilon_2(s), \epsilon_3(s), \epsilon_4(s)\}^{\frac{1}{2}}$.
- $\alpha := \frac{s^2}{\epsilon(s)}$
- $A := A(s) := x_1(s) \in X^{m-1}$, $\bar{A} := \Pi_T A \in \text{graph } g \subset \bar{U} \subset T$
- $B := B(\alpha) := \gamma(\alpha)$, $\bar{B} := \Pi_T(B) \in U \subset T$

Dann ist ϵ monoton wachsend und $\lim_{s \rightarrow 0} \epsilon(s) = 0$. Wir sehen leicht, daß $\alpha \leq s$ für $s \leq 1$.

Wir bemerken weiterhin, daß \bar{B} in unserem Koordinatensystem durch den Vektor $(0, \dots, 0, \alpha) + \bar{r}(\alpha)$ gegeben ist, $\bar{r}(\alpha)$ bezeichnet die Projektion von $r(\alpha)$ auf T (zur Erinnerung: $\gamma(\alpha) = P + \alpha\gamma' + r(\alpha)$). Es folgt, daß $\frac{\|\bar{r}(\alpha)\|}{\alpha}$ für $\alpha \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.

Da die Kurve $x_1(s)$ eine Geodätische auf X^{m-1} ist, steht $x_1''(0)$ senkrecht auf $T_P X^{m-1}$. Wegen $x_1(s) = P + sx_1'(0) + \frac{s^2}{2}x_1''(0) + O(s^3)$ folgt

$$\bar{A}(s) = (s, 0, \dots, 0, \frac{s^2}{2}\langle x_1''(0), w \rangle) + O(s^3)$$

Dabei ist $w = (0, \dots, 0, 1) \in T$ der Vektor in Richtung X^m .

Lemma 4.9. *Für s genügend klein liegt die Strecke zwischen \bar{A} und \bar{B} vollständig in U .*

Bemerkung: An dieser Stelle benötigen wir, daß α (asymptotisch) echt größer als s^2 ist. Andererseits werden wir später brauchen, daß der Quotient $\frac{s^2}{\alpha}$ sehr langsam gegen 0 konvergiert, um bestimmte überflüssige Terme zu beseitigen. Aus diesem Grund mußte α auf solch eine komplizierte Weise definiert werden. Man vergleiche auch mit dem Beweis des Haupttheorems über definierbare Alexandrovräume, wo eine ähnliche Definition gemacht wurde.

Beweis: Nimm an, daß es beliebig kleine $s > 0$ gibt, so daß die Strecke nicht vollständig in U liegt. Der Anstieg der Strecke in Richtung x_m ist von der Größenordnung $\frac{\alpha}{s} = \frac{s}{\epsilon(s)}$. Wenn die Strecke nicht in U liegt, so muß sie den Graphen von g in einem Punkt zwischen \bar{A} und \bar{B} schneiden. Dann ist nach dem Satz von Rolle der Anstieg des Graphen von g gleich dem Anstieg der Strecke.

Wir wissen aber, daß g glatt ist und die Ableitungen bei 0 verschwinden. Deshalb verhalten sich die Ableitungen von g wie $O(s)$. Das ist der Widerspruch, denn $\epsilon(s)$ geht für $s \rightarrow 0$ gegen 0. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Wir bezeichnen mit \bar{L} diese Strecke. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{L}(t) &= (1-t)\bar{A} + t\bar{B} \\ &= ((1-t)s, 0, \dots, 0, t\alpha + (1-t)\frac{s^2}{2}\langle x_1''(0), w \rangle) + t\bar{r}(\alpha) + O(s^3) \quad 0 \leq t \leq 1\end{aligned}$$

Sei L das Urbild von \bar{L} unter Π . Da \bar{L} in U liegt, ist L wohldefiniert und liefert eine Kurve in S zwischen A und B .

In unserem Koordinatensystem ist L gegeben durch

$$L(t) = (\bar{L}(t), f_1(\bar{L}), f_2(\bar{L}), \dots, f_{n-m}(\bar{L}))$$

Wir berechnen die Länge von L , um eine obere Schranke für $d_i(A, B)$ zu bekommen.

Zuerst gibt es die folgenden Abschätzungen:

- $|\bar{B}_1 - \bar{A}_1| = |-s + \bar{r}_1(\alpha)| \leq O(s)$
- $|\bar{B}_k - \bar{A}_k| = |\bar{r}_k(\alpha)| \leq O(\alpha) \leq O(s), \quad k = 2, \dots, m-1$
- $|\bar{B}_m - \bar{A}_m| = |-\frac{s^2}{2}\langle x_1''(0), w \rangle + \alpha + \bar{r}_m(\alpha) + O(s^3)| \leq O(\alpha) \leq O(s)$

Da die erste Komponente von $\bar{B} - \bar{A}$ durch $-s + \bar{r}_1(\alpha)$ gegeben ist, haben wir $\|\bar{B} - \bar{A}\| \geq C_2 s$ mit einer Konstante $C_2 > 0$.

$$L'(t) = \left(\bar{L}'(t), \frac{\partial}{\partial t} f_1(\bar{L}(t)), \frac{\partial}{\partial t} f_2(\bar{L}(t)), \dots, \frac{\partial}{\partial t} f_{n-m}(\bar{L}(t)) \right)$$

Offensichtlich ist $\bar{L}'(t) = \bar{B} - \bar{A}$. Wir berechnen die anderen Ableitungen. Es reicht aus, die Berechnung für $\frac{\partial}{\partial t} f_1(\bar{L})$ durchzuführen:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\bar{L}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{L}_k}{\partial t}$$

Wir behaupten, daß das ein $O(s^2)$ -Term ist.

Für $k = 1, 2, \dots, m - 1$ haben wir $|\frac{\partial f_1}{\partial x_k}| \leq O(s)$ und $|\frac{\partial \bar{L}_k}{\partial t}| \leq O(s)$.

Für $k = m$ und kleine s gilt $|\frac{\partial f_1}{\partial x_m}| \leq \epsilon_3(s) \leq \epsilon(s)$ und $|\frac{\partial \bar{L}_m}{\partial t}| \leq O(\alpha)$. Das Produkt ist $\leq O(\epsilon(s)\alpha) = O(s^2)$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Es folgt

$$\begin{aligned} \|L'(t)\|^2 &\leq \|\bar{L}'(t)\|^2 + O(s^4) \\ &= \|\bar{B} - \bar{A}\|^2 + O(s^4) \\ &\leq (1 + O(s^2))\|\bar{B} - \bar{A}\|^2 \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt haben wir verwendet, daß $\|\bar{B} - \bar{A}\| \geq C_2 s$ mit $C_2 > 0$ gilt.

Daraus können wir schlußfolgern, daß

$$\begin{aligned} d_i(A, B) \leq l(L) &= \int_0^1 \|L'(t)\| dt \\ &\leq (1 + O(s^2))\|\bar{B} - \bar{A}\| \end{aligned}$$

Andererseits gilt trivialerweise

$$\begin{aligned} d_i(A, B) &\geq d_e(A, B) \\ &\geq d_e(\bar{A}, \bar{B}) \\ &= \|\bar{B} - \bar{A}\| \end{aligned}$$

Wir haben also Gleichheit:

$$d_i(A, B) = (1 + O(s^2))\|\bar{B} - \bar{A}\|$$

In unserem Koordinatensystem ist $\bar{B} - \bar{A}$ gegeben durch

$$\bar{B} - \bar{A} = (-s + \bar{r}_1(\alpha), \bar{r}_2(\alpha), \dots, \bar{r}_{m-1}(\alpha), \alpha + \bar{r}_m(\alpha) - \frac{s^2}{2}\langle x_1''(0), w \rangle) + O(s^3)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|\bar{B} - \bar{A}\|^2 &= s^2 - 2s\bar{r}_1(\alpha) + O((\bar{r}_1(\alpha))^2) + \dots + O((\bar{r}_m(\alpha))^2) + \\ &\quad + \alpha^2 + O(\alpha\bar{r}_m(\alpha)) - \alpha s^2 \langle x_1''(0), w \rangle + O(\bar{r}_m(\alpha)s^2) + O(s^4) \\ &= s^2 - 2s\bar{r}_1(\alpha) + \alpha^2 - \alpha s^2 \langle x_1''(0), w \rangle \\ &\quad + O((\alpha\epsilon_1(\alpha))^2) + O(\alpha^2\epsilon_1(\alpha)) + O(\alpha\epsilon_1(\alpha)s^2) + O(s^4) \end{aligned}$$

Für $s \rightarrow 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2 \epsilon_1(\alpha)^2}{\alpha s^2} &\leq \frac{\alpha \epsilon_1(s)^2}{s^2} \leq \frac{\alpha \epsilon(s)^4}{s^2} = \epsilon(s)^3 \rightarrow 0 \\ \frac{\alpha^2 \epsilon_1(\alpha)}{\alpha s^2} &\leq \frac{\alpha \epsilon_1(s)}{s^2} \leq \frac{\alpha \epsilon(s)^2}{s^2} = \epsilon(s) \rightarrow 0 \\ \frac{\alpha \epsilon_1(\alpha) s^2}{\alpha s^2} &= \epsilon_1(\alpha) \rightarrow 0 \\ \frac{s^4}{\alpha s^2} &= \epsilon \rightarrow 0\end{aligned}$$

Damit sieht man, daß

$$\|\bar{B} - \bar{A}\|^2 = s^2 - 2s\bar{r}_1(\alpha) + \alpha^2 - \alpha s^2 \langle x_1''(0), w \rangle + o(\alpha s^2)$$

Aus einfachen Berechnungen und der Tatsache, daß γ eine Geodätische zwischen P und B ist, sehen wir daß

$$s \geq d_i(P, A) \geq d_e(P, A) = s + O(s^3)$$

und

$$d_i(P, B) = \alpha$$

Jetzt können wir das asymptotische Verhalten des Winkels $\angle(A, P, B)$ berechnen:

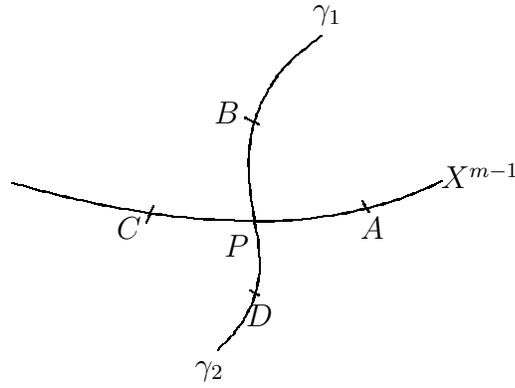
$$\begin{aligned}\cos \angle(A, P, B) &= \frac{d(P, A)^2 + d(P, B)^2 - d(A, B)^2}{2d(P, A)d(P, B)} \\ &= \frac{s^2 + \alpha^2 - (1 + O(s^2))(s^2 - 2s\bar{r}_1(\alpha) + \alpha^2 - \alpha s^2 \langle x_1''(0), w \rangle + o(\alpha s^2)) + O(s^4)}{2\alpha(s + O(s^2))}\end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{r}_1(\alpha)}{\alpha} + \frac{s}{2} \langle x_1''(0), w \rangle + o(s)$$

Bemerkung:

- Wir erinnern daran, daß $\angle(A, P, B)$ den Winkel bei \tilde{P} eines Vergleichsdreieckes $\tilde{A}, \tilde{P}, \tilde{B}$ in $\mathbb{R}^2 = M_0^2$ bezeichnet.

Abbildung 4.3:



- Im Falle $\kappa \neq 0$ müssen wir das entsprechende Kosinusetz anwenden, aber die asymptotische Entwicklung ist die gleiche. Das liegt in der Tatsache begründet, daß Riemannsche Mannigfaltigkeiten in kleinen Maßstäben aussehen wie Euklidische Räume.

Wir machen die gleichen Berechnungen mit $A = x_1(s)$ ersetzt durch $C := x_1(-s)$ und erhalten

$$\cos \angle(C, P, B) = \frac{-\bar{r}_1(\alpha)}{\alpha} + \frac{s}{2} \langle x_1''(0), w \rangle + o(s)$$

Weiterhin liefern die gleichen Berechnungen mit $B = \gamma_1(\alpha_1)$ durch $D := \gamma_2(\alpha_2)$ ersetzt:

$$\cos \angle(A, P, D) = \frac{\bar{r}_2(\alpha)}{\alpha} + \frac{s}{2} \langle x_1''(0), w_2 \rangle + o(s)$$

$$\cos \angle(C, P, D) = \frac{-\bar{r}_2(\alpha)}{\alpha} + \frac{s}{2} \langle x_1''(0), w_2 \rangle + o(s)$$

Die Summe der Kosinus ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos \angle(A, P, B) + \cos \angle(C, P, B) + \cos \angle(A, P, D) + \cos \angle(C, P, D) \\ = s \langle x_1''(0), w_1 + w_2 \rangle + o(s) \quad (4.1) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist wichtig, da sie den Skalarkrümmungsterm von X^{m-1} rein metrisch, d.h. mit Hilfe von Geodätischen und Winkeln, ausdrückt. Sie wird uns später liefern, daß die Skalarkrümmung invariant unter Isometrien ist. Zunächst setzen wir den Beweis des Haupttheorems über definierbare Räume mit nach oben beschränkter Schnittkrümmung fort.

Seien $\gamma_A, \gamma_B = \gamma_1, \gamma_C, \gamma_D = \gamma_2$ die Geodätischen zwischen P und A, B, C, D .
Nach der CAT-Ungleichung gilt

$$\angle_P(\gamma_A, \gamma_B) \leq \angle(A, P, B)$$

und analoge Ungleichungen für die anderen Winkel.

Aus der Dreiecksungleichung für Winkel, der CAT-Ungleichung und der Tatsache, daß B, P, D auf der Geodätischen γ liegen, folgt

$$\pi = \angle_P(\gamma_B, \gamma_D) \leq \angle_P(\gamma_B, \gamma_A) + \angle_P(\gamma_A, \gamma_D) \leq \angle(A, P, B) + \angle(A, P, D)$$

Die Monotonie der Kosinusfunktion liefert uns

$$\cos \angle(A, P, B) + \cos \angle(A, P, D) \leq 0$$

und entsprechend

$$\cos \angle(C, P, B) + \cos \angle(C, P, D) \leq 0$$

Das hat zur Folge, daß

$$s \langle x_1''(0), w_1 + w_2 \rangle + o(s) \leq 0$$

und damit

$$\langle x_1''(0), w_1 + w_2 \rangle \leq 0$$

gilt. Die analoge Ungleichung mit x_1 durch x_i , $i = 1, \dots, m-1$ ersetzt gilt natürlich auch. Das zeigt

$$h(P) = 2(\operatorname{tr} II_{w_1} + \operatorname{tr} II_{w_2}) = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \langle x_i''(0), w_1 + w_2 \rangle \leq 0$$

Das gleiche Argument funktioniert für fast jeden Punkt $P \in X^{m-1}$ nach Satz 2.14.

Da h definierbar ist, ist es stetig außerhalb einer Menge positiver Kodimension. Aus $\operatorname{scal}(S, U) = \int_U h(x) d \operatorname{vol}_{m-1}(x)$ und $h \leq 0$ auf einer dichten Menge folgt $\operatorname{scal}(S, -)|_{X^{m-1}} \leq 0$, was zu beweisen war.

4.2.3 Straten der Kodimension 1, in denen mehr als zwei m -Straten eintreffen

Hat man eine m -dimensionale definierbare Menge mit nichtpositiver Schnittkrümmung gegeben, bei der auf jedem $m - 1$ -Stratum mindestens zwei m -Straten eintreffen, so kann man für die $m - 2$ -Straten nichts mehr über das Skalarkrümmungsmaß aussagen, d.h. dieses kann dort echt positiv werden. Für die $m - 1$ -Straten passiert das noch nicht, wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden.

Es reicht aus, folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma 4.10. *Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende, definierbare Menge der Dimension m , die bezüglich der inneren Metrik ein Raum mit nach oben durch κ beschränkter Krümmung ist. Sei X^{m-1} ein Stratum, in dem mindestens zwei m -Straten eintreffen. Sei $A \in X_1^m$ und $P \in X^{m-1}$ ein zu A nächstgelegener Punkt auf dem Stratum X^{m-1} . Dann läßt sich die Geodätische γ zwischen A und P in jedes andere m -Stratum X_i^m fortsetzen, d.h. es gibt Geodätische $\gamma_2, \dots, \gamma_k$, so daß $\gamma_i, i = 2, \dots, k$ vollständig in \bar{X}_i^m liegt und γ fortsetzt.*

Wir nehmen zunächst an, daß das Lemma richtig ist. Wir wollen zeigen, daß $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}}$ ein nichtpositives Maß ist. Nach Theorem 2.7 reicht es aus zu zeigen, daß

$$\sum_{i=1}^k \text{tr } II_{w_i} \leq 0$$

gilt. Dabei sind w_1, \dots, w_k die Richtungen der m -Straten, die in X^{m-1} eintreffen. Für zwei verschiedene Zahlen $a, b \in \{1, \dots, k\}$ ist

$$\text{tr } II_{w_a} + \text{tr } II_{w_b} \leq 0$$

Das sieht man genau wie im vorigen Abschnitt, der Beweis kann wortwörtlich übertragen werden. Bei Lemma 4.7 benutzt man anstelle von Satz 2.14 das obige Lemma.

Jetzt nimmt man die Summe über alle diese Paare und sieht, daß das Maß $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}}$ nichtpositiv ist. Es gilt also

Satz 4.11. *Sei S eine abgeschlossene, zusammenhängende, definierbare Menge der Dimension m , die bezüglich der inneren Metrik ein Raum mit nach oben durch κ beschränkter Krümmung ist. Sei X^{m-1} ein Stratum, in dem mindestens zwei m -Straten eintreffen. Dann ist*

$$\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}} \leq 0$$

Beweis des Lemmas:

Seien $X_1^m, X_2^m, \dots, X_k^m$ die m -Straten, die in X^{m-1} eintreffen.

Behauptung 1: Für genügend kleine $r > 0$ läßt sich $B_e(P, r) \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m} \setminus \{P\}$ nicht innerhalb von $B(P, 2r) \setminus \{P\}$ kontrahieren.

Beweis von Behauptung 1: Aus Thom's Isotopielemma folgt, daß sich das Paar $(B_e(P, r) \setminus \{P\}, B_e(P, r) \setminus \{P\} \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m})$ für genügend kleines $r > 0$ homotop zum Paar (W, Y) verformen läßt, wobei W eine Vereinigung von k Bällen der Dimension $n - 1$ ist, die alle entlang ihrer Oberfläche S^{n-2} verklebt sind. Y ist die Vereinigung von genau zwei solchen Bällen.

In der zellulären Homologie $H_{n-1}(W)$ stellt Y ein nichttriviales Element dar (orientiert man die beiden Bälle so, daß die Orientation auf dem Rand verschieden ist, so ist Y ein Zykel, es ist aber kein Rand, da W ein $n - 1$ -dimensionaler Raum ist und Y schon die höchste Dimension hat). Also ist Y nicht kontrahierbar, ebensowenig kann $B_e(P, r) \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m} \setminus \{P\}$ kontrahierbar sein.

Behauptung 2: Zu jedem genügend kleinen $r > 0$ gibt es einen Punkt $A(r) \in \gamma \cap B_i(P, r) \cap X_1^m$ und einen Punkt $B(r) \in B_i(P, r) \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m}$ mit

$$d(B(r), A(r)) = d(B(r), P) + d(P, A(r))$$

Diese Gleichung bedeutet, daß P auf der Geodätischen zwischen $A(r)$ und $B(r)$ liegt.

Beweis der Behauptung 2: Sei $A(r)$ ein Punkt auf der Geodätischen γ zwischen A und P , der von P einen Abstand $< r$ hat.

Wähle zu jedem $B \in B(P, r) \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m} \setminus \{P\}$ die Geodätische $\gamma_{A(r), B}$ zwischen $A(r)$ und B und setze

$$H(B, t) := \gamma_{A(r), B}(td(A(r), B)), \quad t \in [0, 1]$$

Dann ist H stetig, denn in Räumen mit nach oben beschränkter Krümmung hängen (genügend kurze) Geodätische stetig von ihren Endpunkten ab (siehe [Bri99]).

Gibt es keinen Punkt $B \in B_e(P, r) \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m} \setminus \{P\}$, für den die Geodätische $\gamma_{A(r), B}$ durch P geht, so definiert H eine Kontraktion innerhalb von $B_e(P, 2r)$ von $B_e(P, r) \cap \overline{X_1^m \cup X_2^m} \setminus \{P\}$ auf $A(r)$, im Widerspruch zu Behauptung 1. Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Behauptung 3: Für genügend kleines r ist das so konstruierte $B(r)$ in X_2^m und die Geodätische $\gamma_{A(r), B(r)}$ liegt vollständig in $\overline{X_1^m \cup X_2^m}$.

Beweis der Behauptung 3: Anderenfalls liegt $B(r)$ schon selbst in $\overline{X_1^m}$ oder man findet auf der Geodätischen zwischen $B(r)$ und P einen Punkt $B'(r)$, der auf X^{m-1} liegt und für den $d(B'(r), A(r)) = d(B'(r), P) + d(P, A)$ gilt. Das ist dann für beliebig kleine $r > 0$ richtig. Jetzt findet man genau wie bei Schritt 1 vom Beweis des Satzes 2.13 einen Widerspruch.

Die obige Argumentation funktioniert natürlich für die anderen Straten X_3^m, \dots, X_k^m genauso. Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. \square

4.2.4 Die Dichte von CAT-Räumen

Obwohl wir dies im Beweis nicht benötigt haben, zeigen wir noch, daß Räume mit nach oben beschränkter Krümmung eine wohldefinierte Dichte besitzen. Genauer gesagt gilt folgender Satz:

Satz 4.12. *Sei S ein m -dimensionaler metrischer Raum, der die Fortsetzungseigenschaft für Geodätische besitzt und der nach oben durch κ beschränkte Krümmung hat. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_m B_i(P, r)}{b_m r^m} \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Setze $f(r) := \frac{B_i(P, r)}{b_m r^m}$. Sei $r' < r < D_\kappa$. Wir definieren eine Abbildung

$$H : B_i(P, r) \mapsto B_i(P, r')$$

durch

$$H(A) := \gamma_{P, A} \left(\frac{r'}{r} d_i(P, A) \right)$$

Dann ist H surjektiv, da Geodätische der Länge $< D_\kappa$ fortgesetzt werden können. Aus der CAT-Ungleichung folgt, daß H eine Kontraktion mit Lipschitz-Faktor $\frac{r'}{r}(1 + \epsilon(r))$ ist mit einer Funktion $\epsilon > 0$, die für $r \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 geht.

Es folgt

$$f(r') \leq f(r)(1 + \epsilon(r))^m$$

Da f nach unten durch 0 beschränkt ist, hat $f(r)$ für $r \rightarrow 0$ einen Grenzwert. \square

Kapitel 5

Invarianz der Skalarkrümmung unter Isometrien

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wurden die Lipschitz-Killing-Krümmungen ursprünglich über das Volumenwachstumspolynom definiert, d.h. unter Zuhilfenahme einer Einbettung in einen Euklidischen Raum. Es war das Verdienst von Weyl zu zeigen, daß man sie auch alleine aus dem metrischen Tensor gewinnt, also auf invariante Weise (siehe [Weyl39]). Speziell haben zwei isometrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten die gleichen Lipschitz-Killing-Krümmungen.

Für definierbare Mengen wurde ein ähnliches Resultat von Bröcker-Kuppe sowie Fu gezeigt: bei definierbaren Isometrien bleiben die Lipschitz-Killing-Krümmungen erhalten. Die Beweisidee ist es, den Satz auf das Resultat von Weyl zurückzuführen, das geschieht mit Approximationsargumenten.

In diesem Kapitel wollen wir ein stärkeres Resultat für die Skalarkrümmung herleiten: sie hängt auf keiner Weise von der Einbettung in einen Euklidischen Raum ab, sondern ist eine rein metrische Größe. Es gilt folgendes Theorem:

Theorem 5.1. *Seien S, \tilde{S} zwei abgeschlossene, zusammenhängende, definierbare Mengen und $f : S \mapsto \tilde{S}$ eine Isometrie zwischen ihnen. Dann induziert f einen Isomorphismus der Skalarkrümmungsmaße, d.h. für alle Borelmengen $\tilde{U} \subset \tilde{S}$ gilt*

$$\text{scal}(\tilde{S}, \tilde{U}) = \text{scal}(S, f^{-1}(\tilde{U}))$$

Beweis:

Die Beweisidee ist in Formel 4.1 auf Seite 81 enthalten, dort wurde die Skalarkrümmung auf $m - 1$ -Straten durch gewisse Winkelasymptotiken ausgedrückt. Die Skalarkrümmung auf m -Straten ist invariant unter Isometrien (klassisch), die Skalarkrümmung auf $m - 2$ -Straten ebenfalls (lokale Eulercharakteristik und Dichte sind invariant unter Isometrien). Weiterhin weiß man, daß das

Skalarkrümmungsmaß nicht von der Stratifikation abhängt. Diese Ideen sollen jetzt im Beweis des Theorems konkretisiert werden.

Sei $f : S \mapsto \tilde{S}$ eine Isometrie zwischen zwei zusammenhängenden, abgeschlossenen, definierbaren Mengen.

Schritt 1: Wir wählen zu S und \tilde{S} zahme Verdierstratifikationen und berechnen jeweils die Skalarkrümmungsmaße. Wir können sie auffassen als stratifizierte Funktionen (h_m, h_{m-1}, h_{m-2}) (bzw. $(\widetilde{h}_m, \widetilde{h}_{m-1}, \widetilde{h}_{m-2})$), wobei h_m die Skalarkrümmung ist und die beiden Terme $h_{m-1} = 2 \sum_{i=1}^k \text{tr } II_{w_i}$ sowie $h_{m-2} = 4\pi \left\{ \frac{1}{2} + (-1)^m \frac{\chi_{\text{lok}}(S, -)}{2} - \theta(S, -) \right\}$ in Theorem 2.7 angegeben werden. Man stellt fest, daß h_{m-1} eine definierbare Funktion ist, dagegen muß h_{m-2} nicht definierbar sein. Durch Verfeinern der Stratifikationen können wir demnach zusätzlich annehmen, daß h_{m-1} (bzw. \tilde{h}_{m-1}) auf jedem $m-1$ -Stratum konstantes Vorzeichen hat und stetig ist. Für h_{m-1} schreiben wir im folgenden einfach h .

Schritt 2: Behauptung: Ist $P \in X^{m-1}$ und $h(P) \neq 0$, dann ist $\tilde{P} = f(P) \notin \widetilde{X^m}$.

Beweis der Behauptung: Wir müssen die Annahme, daß $f(P)$ im glatten Teil liegt, zum Widerspruch führen.

Da die lokale Eulercharakteristik bei stetigen Abbildungen erhalten bleibt, treffen auf X^{m-1} genau zwei m -Straten. Genauer gilt $\chi_{\text{lok}}(S, P) = (1-k)(-1)^{m+1}$, wobei k die Anzahl der m -Straten ist, die in X^{m-1} eintreffen. Für $\tilde{P} = f(P)$ ist $\chi_{\text{lok}}(\tilde{S}, \tilde{P}) = (-1)^m$. Daraus folgt $k = 2$.

Sei $U := X^{m-1} \cap f^{-1}(\widetilde{X^m}) \cap \{h \neq 0\}$. Dann ist U eine offene Umgebung von P , da f und h stetige Funktionen sind. Die beiden m -Straten, die in X^{m-1} eintreffen, seien X_1^m und X_2^m . Wähle einen Punkt $A \in X_1^m$ in der Nähe von P und eine kürzeste Geodätische γ_1 zum Stratum X^{m-1} . Der Fußpunkt sei Q . Nach der Dreiecksungleichung liegt Q in U sobald A nahe genug an P liegt. Da f eine Isometrie ist, ist $f \circ \gamma_1$ eine Geodätische zwischen \tilde{A} und \tilde{Q} . Da \tilde{Q} im glatten Teil von \tilde{S} liegt, kann $f \circ \gamma_1$ über \tilde{Q} hinaus verlängert werden. Dasselbe gilt dann auch in S , es gibt also eine Geodätische γ durch Q . Wir parametrisieren sie wieder nach der Bogenlänge mit $\gamma(0) = Q$. Mit γ_1 bzw. γ_2 bezeichnen wir den positiven bzw. negativen Teil von γ . Nach Konstruktion und den Sätzen 2.12 und 2.13 haben beide Geodätische einen Tangentenvektor in Q und diese stehen jeweils senkrecht auf X^{m-1} .

Die Exponentialabbildung $\exp : T_Q X^{m-1} \mapsto X^{m-1}$ liefert wieder Koordinaten x_1, \dots, x_{m-1} auf X^{m-1} . Setze

$$A := x_1(s), B := \gamma_1(\alpha_1), C := x_1(-s), D := \gamma_2(\alpha_2)$$

wobei α_1, α_2 Funktionen in Abhängigkeit von s sind, die in Abschnitt 4.2 definiert worden. Wir erinnern an folgende Gleichung (siehe Gleichung 4.1):

$$\begin{aligned}\cos \angle(A, Q, B) + \cos \angle(C, Q, B) + \cos \angle(A, Q, D) + \cos \angle(C, Q, D) \\ = s \langle x_1''(0), w_1 + w_2 \rangle + o(s)\end{aligned}$$

Dabei sind w_1, w_2 die Tangentenvektoren von γ_1 und γ_2 in Q .

Da die Winkel der linken Seite auch in \tilde{S} berechnet werden können, gilt

$$\begin{aligned}\cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}) + \cos \angle(\tilde{C}, \tilde{Q}, \tilde{B}) + \cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{D}) + \cos \angle(\tilde{C}, \tilde{Q}, \tilde{D}) \\ = s \langle x_1''(0), w_1 + w_2 \rangle + o(s)\end{aligned}$$

Die Abbildung $\exp_{\tilde{Q}}^{-1} : \tilde{S} \mapsto T_{\tilde{Q}}\tilde{S}$ läßt die Abstände von \tilde{Q} aus invariant. Die Geodätische γ wird in eine Gerade durch 0 transformiert. Hat man im Euklidischen Raum drei Punkte B', Q', D' mit Q' auf der Strecke zwischen B' und D' , so gilt für jeden Punkt A' die Gleichheit

$$\cos \angle(A', Q', B') + \cos \angle(A', Q', D') = 0$$

Wir wenden diese Gleichung auf die Punkte

$$Q' := \exp_{\tilde{Q}}^{-1}(\tilde{Q}), B' := \exp_{\tilde{Q}}^{-1}(\tilde{B}), D' := \exp_{\tilde{Q}}^{-1}(\tilde{D}), A' := \exp_{\tilde{Q}}^{-1}(\tilde{A})$$

an.

Es ist $d(Q', B') = d(\tilde{Q}, \tilde{B}), d(Q', D') = d(\tilde{Q}, \tilde{D})$ da die Abstände von \tilde{Q} aus invariant sind unter \exp . Weiterhin ist $d(A', B') = d(\tilde{A}, \tilde{B})(1 + O(s^2))$ sowie $d(A', D') = d(\tilde{A}, \tilde{D})(1 + O(s^2))$. Um dies einzusehen benutzt man die asymptotische Entwicklung für Jacobifelder, siehe z.B. [G-H-L87]. Also gilt

$$\begin{aligned}\cos \angle(A', Q', B') &= \frac{d(A', Q')^2 + d(B', Q')^2 - d(A', B')^2}{2d(A', Q')d(B', Q')} \\ &= \frac{d(\tilde{A}, \tilde{Q})^2 + d(\tilde{B}, \tilde{Q})^2 - d(\tilde{A}, \tilde{B})^2}{2d(\tilde{A}, \tilde{Q})d(\tilde{B}, \tilde{Q})} + O(s^2) \frac{d(\tilde{A}, \tilde{B})^2}{d(\tilde{A}, \tilde{Q})d(\tilde{B}, \tilde{Q})} \\ &= \cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}) + o(s)\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist ein $o(s)$ -Term, denn asymptotisch für $s \rightarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned}d(\tilde{A}, \tilde{B}) &= d(A, B) \leq \alpha + s \leq 2s \\ d(\tilde{A}, \tilde{Q}) &= d(A, Q) \geq \frac{s}{2} \\ d(\tilde{B}, \tilde{Q}) &= d(B, Q) = \alpha = \frac{s^2}{\epsilon}\end{aligned}$$

Die analoge Rechnung funktioniert für den Winkel $\angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{D})$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}) + \cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{D}) &= \cos \angle(A', Q', B') + \cos \angle(A', Q', D') + o(s) \\ &= o(s) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{B}) + \cos \angle(\tilde{C}, \tilde{Q}, \tilde{B}) + \cos \angle(\tilde{A}, \tilde{Q}, \tilde{D}) + \cos \angle(\tilde{C}, \tilde{Q}, \tilde{D}) = o(s)$$

Also gilt

$$\langle x_1''(0), w_1 + w_2 \rangle = 0$$

und entsprechend für x_2, \dots, x_{m-1} . Damit ist

$$h(Q) = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \langle x_i''(0), w_1 + w_2 \rangle = 0$$

Das ist ein Widerspruch, denn wir hatten Q so gewählt, daß $h(Q) \neq 0$ gilt. Die Annahme $\tilde{P} \in \widetilde{X^m}$ muß also fallengelassen werden, damit ist Schritt 2 beendet.

Schritt 3: Wir wählen jetzt einen Punkt $P \in X^{m-1}$, dessen Bildpunkt $f(P)$ nicht im $m-2$ -Skelett von \tilde{S} liegt und für den $h(P) \neq 0$ gilt. Dann ist $h \neq 0$ in einer Umgebung von P und nach Schritt 2 bildet f eine Umgebung von P in X^{m-1} isometrisch auf eine Umgebung von \tilde{P} in $\widetilde{X^{m-1}}$ ab. Die Anzahl k der m -Straten, die in X^{m-1} bzw. $\widetilde{X^{m-1}}$ eintreffen, ist wieder gegeben durch

$$1 - (-1)^{m+1} \chi_{lok}(S, P) = 1 - (-1)^{m+1} \chi_{lok}(\tilde{S}, \tilde{P})$$

und somit für beide Mengen gleich.

Die m -Straten, die in X^{m-1} eintreffen, seien X_1^m, \dots, X_k^m . Sie sind die lokalen Zusammenhangskomponenten von $S \setminus X^{m-1}$ bei P und werden (lokal) auf die Straten $\widetilde{X}_1^m, \dots, \widetilde{X}_k^m$ abgebildet.

Wähle jetzt einen Punkt $R \in X_1^m$ nahe bei P , eine kürzeste Geodätische zwischen R und X^{m-1} mit Fußpunkt Q . Aus der Dreiecksungleichung folgt wieder, daß Q nahe bei P liegt und somit $h(Q) \neq 0$ nahe bei $h(P)$ liegt. Die Geodätische γ zwischen Q und R sei nach der Bogenlänge parametrisiert mit

$\gamma(0) = Q$. Das von der Exponentialabbildung stammende Koordinatensystem sei wieder mit x_1, \dots, x_{m-1} bezeichnet. Dann bilden die Kurven $f \circ x_j, j = 1, \dots, m-1$ paarweise orthogonale Kurven auf $\widetilde{X^{m-1}}$. Natürlich bildet f die Geodätische γ auf eine Geodätische $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ ab, die kürzeste Verbindung zwischen \tilde{R} und \tilde{Q} ist.

Jetzt folgt aus den Formeln aus Kapitel 4, daß $h(Q)$ rein metrisch aus gewissen Winkeln zwischen den Punkten $P, \gamma(\alpha), x_j(s), x_j(-s), j = 1, \dots, m-1$ berechnet werden kann. Dabei muß α jeweils genügend klein gewählt werden, aber trotzdem noch asymptotisch größer als s^2 sein. Das kann für S und für \tilde{S} simultan geschehen. Da f eine Isometrie ist und die Winkel sowohl in S als auch in \tilde{S} berechnet werden können, hat man für beide Mengen das gleiche asymptotische Verhalten:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m-1} \{\cos \angle(x_j(s), Q, \gamma(\alpha)) + \cos \angle(x_j(-s), Q, \gamma(\alpha))\} \\ &= \frac{s}{2} \left\langle \sum_{j=1}^{m-1} x_j''(0), w_1 \right\rangle + o(s) \\ &= \frac{s}{2} \left\langle \sum_{j=1}^{m-1} (f \circ x_j)''(0), \tilde{w}_1 \right\rangle + o(s) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m-1} x_j''(0), w_1 \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m-1} (f \circ x_j)''(0), \tilde{w}_1 \right\rangle$$

Das ist analog für die anderen Straten richtig und es folgt

$$\begin{aligned} h(Q) &= 2 \left\langle \sum_{j=1}^{m-1} x_j''(0), \sum_{j=1}^k w_j \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \sum_{j=1}^{m-1} (f \circ x_j)''(0), \sum_{j=1}^k \tilde{w}_j \right\rangle \\ &= h(\tilde{Q}) \end{aligned}$$

Läßt man Q gegen P gehen, so strebt \tilde{Q} gegen \tilde{P} . Wegen der Stetigkeit von h folgt $h(P) = h(\tilde{P})$.

Ist $P \in X^{m-1}$ mit $h(P) = 0$ und $f(P) \in \widetilde{X^{m-1}}$, so ist $h(\tilde{P}) = 0$, denn sonst könnte man die obige Argumentation mit vertauschten Rollen von S und \tilde{S} durchspielen.

Da für vol_{m-1} -fast jeden Punkt $P \in X^{m-1}$ der Punkt $f(P)$ nicht im $m - 2$ -Skelett von \tilde{S} liegt (f ist eine Isometrie!), gilt fast überall die Gleichung $h(P) = h(\tilde{P})$.

Schließlich folgt daraus die Gleichheit der Skalarkrümmungsmaße von S bzw. \tilde{S} auf den $m - 1$ -Straten:

$$\text{scal}(S, -)|_{X^{m-1}} = \text{scal}(\tilde{S}, -)|_{\widetilde{X^{m-1}}}$$

Schritt 4: Es gilt auch

$$\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}} = \text{scal}(\tilde{S}, -)|_{\widetilde{X^{m-2}}}$$

und

$$\text{scal}(S, -)|_{X^m} = \text{scal}(\tilde{S}, -)|_{\widetilde{X^m}}$$

Letzteres ist die klassische Tatsache, daß die Skalarkrümmung eine metrische Invariante ist. Die erste Gleichung folgt aus der Formel für $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}}$, in der nur intrinsische Terme (m, χ_{lok}, θ) stehen (siehe Theorem 2.7). Dabei geht man so vor wie in Schritt 2 und 3: zuerst zeigt man, daß ein Punkt, für den $h_{m-2} \neq 0$ gilt, nicht in einem $m - 1$ -Stratum liegt. Dann erhält $f|_{X^{m-2}}$ fast überall die Größe h_{m-2} und man ist fertig.

Damit ist der Beweis von Theorem 5.1 vollständig. \square

Kapitel 6

Konforme Variation der Metrik

Klassische Aussagen der Riemannschen Geometrie beschäftigen sich mit Variationen der Skalarkrümmung. Diese sollen auf definierbare Mengen übertragen werden. Während Riemannsche Mannigfaltigkeiten nicht eingebettet zu sein brauchen und es somit Sinn macht, auf der gleichen Mannigfaltigkeit verschiedene Metriken zu betrachten, sind definierbare Mengen in Euklidische Räume eingebettet und tragen somit eine kanonische Metrik. Um den Variationsformeln trotzdem Sinn zu geben, stellt sich die Theorie der Analytisch-Geometrischen Kategorien als die geeignete Verallgemeinerung von \mathfrak{o} -minimalen Systemen heraus. Auf den Zusammenhang zwischen diesen Theorien wurde bereits in Abschnitt 1.1.5 hingewiesen.

Die Strategie ist die folgende: \mathcal{C} -Mengen sind Teilmengen von Mannigfaltigkeiten, tragen aber noch keine natürliche Metrik. Eine Metrik auf $S \in \mathcal{C}(M)$ wird definitionsgemäß induziert durch eine Metrik auf der umgebenden Mannigfaltigkeit M . Da man letztere auf verschiedene Weisen mit einer Riemannschen Metrik ausstatten kann, gilt das auch für S . Eine konforme Änderung der Metrik ist gegeben, wenn die Metrik auf M punktweise mit einer reellen Zahl multipliziert wird und dieser Faktor eine glatte Funktion auf M bildet.

Bezeichnungen:

Sei $S \in \mathcal{C}(M)$ eine kompakte \mathcal{C} -Menge der Dimension $m \geq 3$ mit einer Metrik g . Sei f eine reell analytische Funktion auf S (d.h. die Einschränkung einer reell analytischen Funktion auf M), die wir auch als stratifizierte Funktion auffassen. Wir bezeichnen mit S_t die Menge S , versehen mit der Metrik $g_t := (1 + tf)g$. Da S kompakt ist, ist für genügend kleine t g_t wieder eine Metrik (gegebenfalls muß die umgebende Mannigfaltigkeit M verkleinert werden). Mit $\text{scal}_t(S)$ bezeichnen wir die reelle Zahl $\text{scal}(S_t, S_t)$. Der Term $\langle \text{scal}, f \rangle$ steht für das (stratifizierte) Skalarprodukt der beiden (stratifizierten) Funktionen f und scal .

Theorem 6.1. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{scal}_t = \frac{m-2}{2} \langle \text{scal}, f \rangle$$

Bevor wir zum Beweis kommen, muß eine Variante des Satzes von Gauss bewiesen werden, die später benötigt wird.

6.1 Satz von Gauss

Bei den Variationsformeln, die wir erhalten werden, treten gewisse Randterme auf, die im glatten Fall gegen innere Terme gekürzt werden können. Dazu benutzt man den Satz von Gauss. Diesen Satz auch in Analytisch-Geometrischen Kategorien verfügbar zu machen, ist das Ziel dieses Abschnittes. Die Beweisidee besteht aus zwei Teilen: zunächst wird mit einem schönen Trick gezeigt, daß der Laplaceoperator einer glatten Funktion f integrierbar ist. Dann folgt mit Approximationsargumenten der Satz aus dem entsprechenden Satz in der klassischen Situation.

Satz 6.2. *Gegeben sei eine kompakte Menge $S \in \mathcal{C}(M)$, eine (reell analytische) Riemannsche Metrik g auf M sowie eine reell analytische Funktion f auf M . Sei X^m ein höchstdimensionales Stratum von S . Dann gilt*

$$\int_{X^m} \Delta f d \text{vol}_m = \int_{\partial X^m} w(f) d \text{vol}_{m-1}$$

Dabei bezeichnet w den in Richtung X^m weisenden Einheitsnormalenvektor von ∂X^m .

Beweis:

Schritt 1: Behauptung: Δf ist auf X^m integrierbar.

Um die Behauptung zu beweisen, versehen wir M mit der Metrik $g^1 := e^{2f}g$. Diese Metrik ist reell analytisch und induziert eine Metrik auf S und damit auf X^m . Die Skalarkrümmung von X^m bezüglich g^1 ist nach [Bes87] gegeben durch

$$s^1 = e^{-2f}(s + 2(m-1)\Delta f - (m-2)(m-1)|df|^2)$$

Nun muß s^1 integrierbar sein. Zur Begründung zerlegen wir eine Umgebung von S in $(M, e^{2f}g)$ in endlich viele Stücke und betten diese isometrisch in einen Euklidischen Raum ein. Das ist möglich nach einem Theorem von Janet, siehe [Jan26] sowie [Gro86]. Dann gehen die Teile von S über in definierbare Mengen, für die die Skalarkrümmung jeweils integrierbar ist.

Aus den gleichen Gründen folgt, daß s integrierbar ist.

Wegen der Kompaktheit von S ist f beschränkt. Der Term $|df|$ ist ebenfalls beschränkt und somit integrierbar. Also läßt sich Δf als Summe von integrierbaren Funktionen darstellen und ist selbst integrierbar. Das zeigt die Behauptung.

Schritt 2: Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß X^m eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist (notfalls muß feiner stratifiziert werden). Wir benutzen innere approximierende Funktionen im Sinne von [Ku99] und erinnern zuerst an die Definition:

Definition 6.3. ([Ku99]) Sei S eine kompakte definierbare Menge, X^m ein Stratum der höchsten Dimension, welches eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Gegeben sei eine stetige Funktion $g : X^m \mapsto [0, \infty)$. Setze $X_t := g^{-1}([t, \infty))$. Dann heißt g innere approximierende Funktion zu X^m , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- a) $\partial X^m = g^{-1}(0)$.
- b) g ist C^3 auf X^m .
- c) Es gibt ein $\delta > 0$, so daß X_δ alle singulären Punkte von g enthält.
- d) Sei (a_k) in $X^m \setminus X_\delta$ eine Folge mit $a_k \rightarrow x \in X^i \subseteq \partial X^m$ sowie $\frac{\text{grad } g(x_k)}{\|\text{grad } g(x_k)\|} \rightarrow v \in T_x \mathbb{R}^n$. Dann gilt $v \perp T_x X^i$.
- e) Es gibt ein $R > 0$ und eine Schranke S , so daß für alle $t \in [0, \delta]$ gilt: für fast alle $a \in \mathbb{R}^n$ hat $\text{dist}_a^2|_{X_t} : X_t \mapsto \mathbb{R}$ höchstens S kritische Punkte x mit $\|x - a\| \leq R$.

In [Ku99] wird gezeigt, daß für definierbare Mengen innere approximierende Funktionen existieren.

Für $t \in (0, \delta)$ zerlegen wir das Integral von Δf über X^m in zwei Teile:

$$\int_{X^m} \Delta f d \text{vol}_m = \int_{X_t} \Delta f d \text{vol}_m + \int_{X^m \setminus X_t} \Delta f d \text{vol}_m$$

Aus Schritt 1 folgt, daß der zweite Summand für $t \rightarrow 0$ gegen 0 geht.

X_t ist dagegen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand $g^{-1}(t)$ und wir können den klassischen Satz von Gauss (siehe z.B. [Lang95]) anwenden. Das nach innen zeigende Normalenvektorfeld des Randes ist gegeben durch $\frac{\text{grad } g}{\|\text{grad } g\|}$. Es folgt also

$$\int_{X_t} \Delta f d \text{vol}_m = \int_{g^{-1}(t)} \left\langle \frac{\text{grad } g}{\|\text{grad } g\|}, \text{grad } f \right\rangle$$

Den Grenzwert der linken Seite kennen wir, den Grenzwert der rechten Seite müssen wir noch ausrechnen.

Für $x \in X^m$ setzen wir $v(x) := \frac{\text{grad } g}{\|\text{grad } g\|}$. Dann kann v stetig fortgesetzt werden auf $X^m \cup X^{m-1}$, das besagt die vierte Bedingung an die innere approximierende Funktion sowie die Eindeutigkeit des Limestangentialraumes an Straten der

Kodimension 1 (Satz 2.8). Es ist dann für $x \in X^{m-1}$ $v(x) = w(x)$, wobei w der in Richtung X^m zeigende Einheitsnormalenvektor von X^{m-1} ist.

Wir setzen weiterhin $h(x) := \langle v(x), \text{grad } f(x) \rangle$ für $x \in X^m \cup X^{m-1}$ und $h = 0$ auf $\overline{X^{m-2}}$.

Es ist

$$\int_{g^{-1}(t)} \left\langle \frac{\text{grad } g}{\|\text{grad } g\|}, \text{grad } f \right\rangle d \text{vol}_{m-1} = 2 \int_X h d\Lambda_{m-1}(X_t, -)$$

denn $\Lambda_{m-1}(X_t, -)$ ist gerade die Hälfte des $m - 1$ -Volumenmaßes des Randes von X_t und dieser ist gegeben durch $g^{-1}(t)$.

Nach dem Zweiten Approximationssatz aus [Ku99] konvergiert $\Lambda_{m-1}(X_t, U)$ für $t \rightarrow 0$ gegen $\Lambda_{m-1}(X, U)$, falls U offen und mit $\overline{X^m}$ verträglich ist. Dabei heißt U mit $\overline{X^m}$ verträglich, wenn für jedes Stratum X^i auf dem Rand von X^m der Durchschnitt $\partial U \cap X^i$ höchstens die Dimension i hat. Die offenen Mengen $h^{-1}((a, b))$ sind mit $\overline{X^m}$ verträglich außer für endlich viele Werte von a bzw. b . Das folgt aus dem Satz von Sard und der Tatsache, daß h definierbar ist.

Mit einigen technischen Argumenten, die hier nicht ausgeführt werden sollen (im wesentlichen schaut man sich die Definition der Lebesgueintegrale an und benutzt die Beschränktheit von h), folgt leicht

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{g^{-1}(t)} \left\langle \frac{\text{grad } g}{\|\text{grad } g\|}, \text{grad } f \right\rangle d \text{vol}_{m-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \int_X h d\Lambda_{m-1}(X_t, -) \\ &= 2 \int_X h d\Lambda_{m-1}(X, -) \\ &= \int_{X^{m-1}} w(f) d \text{vol}_{m-1} \end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, so folgt

$$\int_{X^m} \Delta f d \text{vol}_m = \int_{\partial X^m} w(f) d \text{vol}_{m-1}$$

was zu beweisen war. \square

6.2 Beweis der Variationsformel

Beweis:

Schritt 1 (Glatter Teil):

Auf kompakten glatten Mannigfaltigkeiten gibt es klassische Formeln für die Variation der Skalarkrümmung unter konformen Änderungen der Metrik. Man

benutzt oft andere Parametrisierungen als die obige, genauer gesagt setzt man $g^1 := \psi^{\frac{4}{m-2}}g$ mit einer glatten positiven Funktion ψ auf S sowie $g^1 = e^{2\bar{f}}g$ mit einer glatten Funktion \bar{f} auf S . Dann gelten folgende Formeln (siehe [Bes87]):

- Das Volumenelement bezüglich der Metrik g^1 ist gegeben durch $\mu_{g^1} = e^{m\bar{f}}\mu_g$.
- Die Skalarkrümmung bezüglich der Metrik g^1 ist gegeben durch

$$s^1 = 4 \frac{m-1}{m-2} \frac{\Delta\psi}{\psi^{\frac{m+2}{m-2}}} + s\psi^{\frac{-4}{m-2}}$$

- Für den Levi-Civita Zusammenhang ist

$$\nabla_X^1 Y = \nabla_X Y + d\bar{f}(X)Y + d\bar{f}(Y)X - g(X, Y)D\bar{f}$$

Die Umrechnung der Darstellungen erfolgt durch $\psi_t := (1 + tf)^{\frac{m-2}{4}}$ und $\bar{f}_t := \frac{1}{2} \log(1 + tf)$. Wir schreiben für die zugehörige Skalarkrümmung (hier ist die Skalarkrümmung im klassischen Sinne gemeint) bzw. das Volumenelement einfach s_t bzw. $(d \text{vol}_m)_t$. Das Volumenelement bezüglich g ist wieder $d \text{vol}$.

Offenbar gilt

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{m-2}{4} f$$

Jetzt können wir für ein gegebenes m -Stratum X^m alles einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{scal}(S_t, X^m) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{X^m} s_t (d \text{vol}_m)_t \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{X^m} \left\{ 4 \frac{m-1}{m-2} \frac{\Delta\psi_t}{\psi_t^{\frac{m+2}{m-2}}} + s\psi_t^{\frac{-4}{m-2}} \right\} \psi_t^{\frac{2m}{m-2}} d \text{vol}_m \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{X^m} \left\{ 4 \frac{m-1}{m-2} \psi_t \Delta\psi_t + \psi_t^2 s \right\} d \text{vol}_m \\ &= \int_{X^m} \left\{ 4 \frac{m-1}{m-2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \psi_t \Delta\psi_0 + \psi_0 \Delta \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \psi_t \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\psi_0 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \psi_t s \right\} d \text{vol}_m \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{X^m} \left\{ 4 \frac{m-1}{m-2} \Delta \left(\frac{m-2}{4} f \right) + \frac{m-2}{2} f s \right\} d \text{vol}_m \\ &= \int_{X^m} \left\{ (m-1) \Delta f + \frac{m-2}{2} f s \right\} d \text{vol}_m \end{aligned}$$

An der mit (*) bezeichneten Stelle wurde $\psi_0 \equiv 1$ und $\Delta\psi_0 \equiv 0$ eingesetzt.

Schritt 2 (Straten der Kodimension 1):

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ das Skalarprodukt bezüglich der Metrik g^1 . Die in Richtung der höchstdimensionalen Straten weisenden Einheitsvektoren bezüglich g bzw. g^1 können leicht ineinander umgerechnet werden: $\tilde{w}_i = e^{-\bar{f}_t} w_i$. Ebenso gilt für das Orthonormalsystem des Tangentialraumes von X^{m-1} in x : $\tilde{X}_j = e^{-\bar{f}_t} X_j$.

Bezeichnet man mit $h(x)$ den zu integrierenden Term, der bei der Berechnung von $\text{scal}(S, X^{m-1})$ auftritt und mit $\tilde{h}(x)$ den entsprechenden Term bei der Berechnung von $\text{scal}(S_t, X^{m-1})$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x) &= -2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-1} \left\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_j} \tilde{w}_i, \tilde{X}_j \right\rangle_1 \\
&= -2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-1} \left\langle \tilde{\nabla}_{X_j} e^{-\bar{f}_t} w_i, X_j \right\rangle \\
&= -2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ e^{-\bar{f}_t} \left\langle \tilde{\nabla}_{X_j} w_i, X_j \right\rangle + \left\langle X_j (e^{-\bar{f}_t}) w_i, X_j \right\rangle \right\} \\
&= -2e^{-\bar{f}_t} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-1} \left\langle \nabla_{X_j} w_i + d\bar{f}_t(X_j)w_i + d\bar{f}_t(w_i)X_j - g(X_j, w_i)D\bar{f}_t, X_j \right\rangle \\
&= -2e^{-\bar{f}_t} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \left\langle \nabla_{X_j} w_i, X_j \right\rangle + d\bar{f}_t(w_i) \right\} \\
&= e^{-\bar{f}_t} h(x) - 2e^{-\bar{f}_t} \sum_{i=1}^k (m-1) d\bar{f}_t(X_i)
\end{aligned}$$

Setzen wir das in den Ausdruck zur Berechnung der Skalarkrümmung ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\text{scal}(S_t, X^{m-1}) &= \int_{X^{m-1}} \tilde{h}(x) (d \text{vol}_{m-1})_{e^{2\bar{f}_t} g} \\
&= \int_{X^{m-1}} e^{(m-1)\bar{f}_t} \tilde{h}(x) d \text{vol}_{m-1} \\
&= \int_{X^{m-1}} \left\{ e^{(m-2)\bar{f}_t} h(x) - 2e^{(m-2)\bar{f}_t} (m-1) \sum_{i=1}^k d\bar{f}_t(w_i) \right\} d \text{vol}_{m-1} \\
&= \int_{X^{m-1}} \left\{ \psi_t^2 h(x) - 2 \frac{m-1}{m-2} \sum_{i=1}^k w_i (\psi_t^2) \right\} d \text{vol}_{m-1}
\end{aligned}$$

Jetzt kann man die Ableitung an der Stelle $t = 0$ ausrechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{scal}(S_t, X^{m-1}) = \int_{X^{m-1}} \left\{ \frac{m-2}{2} fh - (m-1) \sum_{i=1}^k w_i(f) \right\} d \text{vol}_m$$

Schritt 3: Straten der Kodimension 2:

Der Term, über den integriert wird, um $\text{scal}(S, -)|_{X^{m-2}}$ zu berechnen, ist gegeben durch

$$h_{m-2}(x) = \frac{1}{2} + (-1)^m \frac{\chi_{\text{lok}}(S, x)}{2} - \theta(S, x)$$

Bei einer konformen Änderung der Metrik verändert er sich nicht. Nur die Volumenform auf X^{m-2} wird geändert. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{scal}(S_t, X^{m-2}) &= \int_{X^{m-2}} \tilde{h}_{m-2}(x) (d \text{vol}_{m-2})_{e^{2\bar{f}}g} \\ &= \int_{X^{m-2}} e^{(m-2)\bar{f}} h_{m-2}(x) d \text{vol}_{m-2} \\ &= \int_{X^{m-2}} \psi^2 h_{m-2}(x) d \text{vol}_{m-2} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\partial \psi_t^2}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{m-2}{2} f$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{scal}(S_t, X^{m-2}) &= \int_{X^{m-2}} \frac{\partial \psi_t^2}{\partial t} \Big|_{t=0} h_{m-2}(x) d \text{vol}_{m-2} \\ &= \frac{m-2}{2} \int_{X^{m-2}} f h_{m-2}(x) d \text{vol}_{m-2} \end{aligned}$$

Schritt 4:

Jetzt fassen wir die Terme aus den ersten drei Schritten zusammen und finden

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \text{scal}(S_t, S_t) &= \int_{X^m} \left\{ (m-1)\Delta f + \frac{m-2}{2}fs \right\} d \text{vol}_m \\ &\quad + \int_{X^{m-1}} \left\{ \frac{m-2}{2}fh - (m-1) \sum_{i=1}^k w_i(f) \right\} d \text{vol}_{m-1} \\ &\quad + \frac{m-2}{2} \int_{X^{m-2}} fh_{m-2}(x) d \text{vol}_{m-2} \\ &= \frac{m-2}{2} \langle f, \text{scal} \rangle \\ &\quad + (m-1) \left(\int_{X^m} \Delta f d \text{vol}_m - \int_{X^{m-1}} \sum_{i=1}^k w_i(f) d \text{vol}_{m-1} \right)\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß $\langle f, \text{scal} \rangle$ das (stratifizierte) Skalarprodukt der (stratifizierten) Funktionen scal und f bezüglich des (stratifizierten) Volumenmaßes $\text{vol}_m, \text{vol}_{m-1}, \text{vol}_{m-2}$ bezeichnet. In der obigen Formel ist natürlich über alle Straten X^m, X^{m-1} sowie X^{m-2} zu summieren. Für ein Stratum X^{m-1} der Kodimension 1 sind die w_i die in die höchstdimensionalen Straten zeigenden Einheitsvektoren.

Der letzte Summand fällt nach dem Satz von Gauss (Satz 6.2) weg.

Damit ist der Beweis von Theorem 6.1 vollständig. \square

Korollar 6.4. *Eine Metrik g auf S ist genau dann kritischer Punkt von $\text{scal}(S)$ bezüglich allen Variationen mit zu g konformen Metriken gleichen Volumens, wenn*

$$\text{scal}(S_g, -) = c \text{vol}(S_g, -)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis: Die Bedingung an das Volumen besagt, daß nur solche Variationen der Metrik zulässig sind, bei denen das Volumen gleich bleibt. Es muß also

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \text{vol}(S_{g^t}) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \int_{X^m} (1+tf)^m d \text{vol}_m = m \int_{X^m} f d \text{vol}_m = 0$$

gelten.

Schritt 1: Angenommen, g ist kritisch. Wir müssen zeigen, daß $\text{scal}(S_g, -) = c \text{vol}(S_g, -)$ gilt.

Wählt man für f Funktionen, deren Integral über X^m verschwindet und die in einer Umgebung des $m - 1$ -Skeletts identisch 0 sind, so sieht man, daß die Skalarkrümmung auf dem glatten Teil konstant sein muß.

Eine beliebige glatte Funktion auf X^{m-1} , die in einer Umgebung des $m - 2$ -Skeletts verschwindet, kann zu einer glatten Funktion mit Integral 0 auf X^m erweitert werden. Der Ausdruck $\langle \text{scal}, f \rangle$ ist dann gegeben durch $\langle \text{scal}_{m-1}, f_{m-1} \rangle$. Damit er für alle solchen Funktionen f verschwindet, muß scal_{m-1} identisch 0 sein.

Analog zeigt man, daß scal_{m-2} identisch 0 ist.

Das beendet diese Richtung.

Schritt 2: Ist $\text{scal}(S_g, -) = c \text{vol}(S_g, -)$, so folgt sofort $\text{scal}_{m-1}, \text{scal}_{m-2} \equiv 0$. Für eine glatte Funktion f ist dann $\langle \text{scal}, f \rangle = c \int_{X^m} f d\text{vol}_m$. Da nur Variationen mit Integral 0 zugelassen waren, ist der letzte Ausdruck 0 und somit g kritisch bezüglich scal .

Das beendet die andere Richtung und damit den Beweis von Korollar 6.4. \square

In der glatten Situation (ab Dimension 3) sind die Metriken, die bezüglich konformen Änderungen der Metrik mit gleichbleibendem Volumen kritisch unter dem Funktional scal sind, genau die Metriken mit konstanter Skalarkrümmung. Durch Analogie werden wir motiviert, konstante Skalarkrümmung wie folgt zu definieren:

Definition 6.5. Sei $\dim S \geq 2$. Eine Metrik g auf S hat konstante Skalarkrümmung, wenn

$$\text{scal}(S_g, -) = c \text{vol}(S_g, -)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Für Dimensionen größer oder gleich 3 besagt das obige Korollar dann wie im glatten Fall, daß die kritischen Punkte des Funktionals scal bei konformen Änderungen der Metrik unter gleichbleibendem Volumen genau die Metriken mit konstanter Skalarkrümmung sind.

Der Fall $\dim S = 2$ wurde im Theorem 6.1 und im Korollar 6.4 ausgeschlossen. In der Tat ist in diesem Fall jede Metrik kritisch, denn scal ist dann nichts anderes als $4\pi\chi(S)$ und damit unabhängig von der gewählten Metrik. Trotzdem macht die obige Definition auch für diese Dimension Sinn.

Wir wollen jetzt einige Beispiele von Mengen mit konstanter Skalarkrümmung aufführen.

Beispiele:

- Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit hat genau dann konstante Skalarkrümmung im Sinne von Definition 6.5, wenn ihre Skalarkrümmung im klassischen Sinne konstant ist.

- Eine Halbsphäre hat konstante Skalarkrümmung, da der Rand geodätisch ist und somit keinen Term zu scal liefert.
- Klebt man Mannigfaltigkeiten konstanter Skalarkrümmung entlang von Straten der Kodimension mindestens 3 zusammen, so erhält man Räume mit konstanter Skalarkrümmung. Beispielsweise kann man zwei Euklidische Räume \mathbb{R}^3 entlang des Ursprungs 0 zusammenkleben und erhält einen Raum konstanter Skalarkrümmung. Dieses Beispiel zeigt, daß die lokale Topologie von Räumen konstanter Skalarkrümmung nicht besonders einfach sein muß. Die Bedingung, konstante Skalarkrümmung zu haben ist eine Bedingung an die $m, m-1$ und $m-2$ -Straten, für niederdimensionale Straten wird keine Einschränkung gemacht.

Vermutungen und weitere Fragestellungen

Die Haupttheoreme dieser Arbeit zeigen, daß die eingeführte Definition der Skalarkrümmung alle gewünschten Eigenschaften hat: sie ist verträglich mit der Schnittkrümmung im metrischen Sinne, invariant unter Isometrien und verhält sich bei konformen Änderungen der Metrik wie die klassische Skalarkrümmung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. In dieser Hinsicht ist die vorliegende Arbeit relativ abgeschlossen. Trotzdem ergeben sich weitere Probleme und Fragestellungen, von denen hier einige erwähnt werden sollen:

Problem 1: Die Gültigkeit der Querschnittsformel bei definierbaren Mengen wurde für fast jeden Punkt bewiesen. Interessant wäre es zu wissen, wann diese Formel nicht nur fast überall, sondern für jeden Punkt gilt. Eine plausible Vermutung scheint zu sein, daß dies bei Verdier-stratifizierten definierbaren Mengen der Fall ist.

Problem 2: Die Voraussetzung, daß S eine definierbare Menge ist, wurde nur selten wirklich benutzt. Es scheint dennoch nicht einfach zu sein, eine größere Klasse von stratifizierten Räumen zu spezifizieren, für die sich die Skalarkrümmung definieren läßt und die Haupttheoreme der Arbeit ihre Gültigkeit behalten. Bereits die Existenz von Volumen und Dichte führt auf schwierige Probleme, die bei definierbaren Mengen nicht auftreten.

Problem 3: Es stellt sich die Frage, welche topologischen Hindernisse es für die Existenz einer Metrik mit positiver oder negativer Skalarkrümmung gibt. Dieser Problemkreis ist bereits im klassischen Fall recht schwierig, eine Übertragung auf die singuläre Situation wäre sehr wünschenswert.

Problem 4: Beschränkt man sich nicht auf konforme Änderungen der Metrik, sondern läßt beliebige Variationen zu, so ergeben sich einige Schwierigkeiten. Schon bei konformen Änderungen der Metrik mußte zunächst eine Version des Satzes von Gauß im \mathfrak{o} -minimalen Kontext bewiesen werden. Während man im Fall von Riemannschen Mannigfaltigkeiten gewisse Terme unter Zuhilfenahme von klassischen Sätzen der Art des Satzes von Gauß ausrechnen kann, ist das bei definierbaren Mengen nicht ohne weiteres möglich. Trotzdem ist dieses Problem sehr interessant, denn die Terme, die im klassischen Fall auftreten,

hängen stark mit der Riccikrümmung zusammen. Eventuell ist es möglich, auf diesem Wege auch Riccikrümmung für definierbare Mengen einzuführen.

Problem 5: Wir haben gesehen, daß die Skalarkrümmung eine innere Größe ist, d.h. invariant unter Isometrien. Es wäre interessant, eine Definition der Skalarkrümmung zu finden, die nur auf innere Terme zurückgreift (z.B. auf das Volumen kleiner Bälle). Allerdings scheint dieses Problem im Augenblick außer Reichweite zu sein. Ebenfalls unklar ist, wie sich die Skalarkrümmung unter Bilipschitzabbildungen verhält.

Literaturverzeichnis

- [B-T95] Bekka, K., Trotman, D.: Sur les propriétés métriques des espaces stratifiés.- preprint 1995
- [Ber98] Berger, M.: Riemannian Geometry during the second half of the twentieth century.- in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-vereinigung 100(1998).- pp 45-208
- [Bes87] Besse, A.: Einstein manifolds.- Berlin: Springer Verlag, 1987
- [Bir98] Birbrair, L., Mostowski, T.: Normal embeddings of semialgebraic sets.- preprint 1998
- [B-C-R87] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.-F.: Géométrie algébrique réelle.- Berlin: Springer Verlag, 1987.
- [Bre93] Bredon, G. E.: Topology and Geometry.- New York: Springer Verlag 1993
- [Bri99] Bridson, M., Haefliger, A.: Metric spaces of Non-Positive Curvature.- Berlin: Springer Verlag, 1999.
- [Bro98] Bröcker, L.: On symmetric semialgebraic sets and orbit spaces.- in: Singularities Symposium, Banach Center Publ. 44(1998).- pp 37-50
- [B-K99] Bröcker, L., Kuppe, M.: Integral geometry of tame sets.- preprint 1999.- <http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/reine/u/broecker>
- [B-K-S97] Bröcker, L., Kuppe, M., Scheufler, W.: Inner metric properties of 2-dimensional semi-algebraic sets.- in: Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid 10(1997).- pp 51-78
- [B-G-P92] Burago, Yu, Gromov, M., Perelman, G.: A. D. Alexandrov spaces with curvatures bounded below.- in: Uspekhi Mat. Nauk 47(1992), pp3-51 translation in: Russian Math. Surveys 47(1992).- pp 1-58
- [C-M-S84] Cheeger, J., Müller, W., Schrader, R.: On the Curvature of Piecewise Flat Spaces.- in: Communications in Mathematical Physics 92(1984).- pp 405-454

- [C-M-S86] Cheeger, J. Müller, W., Schrader, R.: Kinematic and tube formulas for piecewise linear spaces.- in: Indiana University Mathematics Journal 35(1986).- pp 737-754
- [Co97] Comte, G.: Multiplicity of complex-analytic sets and bilipschitz maps.- preprint 1997.- <http://www.imf.au.dk/esn/>
- [Co98] Comte, G.: Densité et images polaires en géométrie sous-analytiques.- Thèse de doctorat, Université de Provence, 1998.
- [Co99a] Comte, G.: Formule de Cauchy-Crofton pour la densité des ensembles sous-analytiques.- in: Comptes rendus de l'Académie des Sciences 328(1999).- pp 505-508
- [Co99b] Comte G.: Equisingularité réelle: nombres de Lelong et images polaires. preprint 1999
- [Cos91] Coste, M.: Trivialités en famille.- in: LNM 1524 (1991).- pp 193-204
- [Cos00a] Coste, M.: An introduction to semialgebraic geometry.- Università di Pisa, Dipartimento di Matematica (2000).
- [Cos00b] Coste, M.: An introduction to o-minimal geometry.- Università di Pisa, Dipartimento di Matematica (2000).
- [Fer94] Ferrarotti, M.: G-manifolds and Stratifications.- in: Rendiconti dell' Istituto di Matematica dell' Università di Trieste 26(1994).- pp 211-233
- [Fer97] Ferrarotti, M.: About Geodesic Distance on Riemannian Stratified Spaces.- preprint 1997
- [Fu94] Fu, J.: Curvature Measures of subanalytic sets.- in: American Journal of Mathematics 116(1994).- pp 819-880
- [G-H-L87] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J.: Riemannian Geometry.- Berlin: Springer Verlag 1987.
- [G-M88] Goresky, M., MacPherson, R.: Stratified Morse Theory.- Berlin: Springer Verlag 1988
- [Gri98] Grieser, D.: Local geometry of singular real analytic surfaces.- preprint 1998
- [G-L99] Grieser, D., Lesch, M.: On the L^2 -Stokes theorem and Hodge theory for singular algebraic varieties.- preprint SFB 288, 1999
- [Gro99] Gromov, M.: Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. With appendices by M.Katz, P.Pansu and S. Semmes.- Boston: Birkhäuser Verlag 1999.

- [Gro86] Gromov, M.: Partial differential relations.- Berlin: Springer Verlag 1986.
- [How93] Howard, R.: The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces.- in: Memoirs of the American Mathematical Society 509(1993).- pp 1-69
- [Jan26] Janet: Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.- in: Ann. Soc. Pol. Math. 5(1926).- pp 38-43
- [Jost98] Jost, J.: Riemannian Geometry and Geometric Analysis.- Berlin: Springer Verlag, 1998.
- [Ku99] Kuppe, M.: Integralgeometrie Whitney-Stratifizierter Mengen.- Dissertation Münster 1999.
- [K-R89] Kurdyka, K., Raby, G.: Densité des ensembles sous-analytiques.- in: Annales de l'institut Fourier 39(1989).- pp 753-771
- [K-O97] Kurdyka, K., Orro, P.: Distance géodésic sur un sous-analytique.- in: Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid 10(1997).- pp 173-182
- [Lang95] Lang, S.: Differential and Riemannian Manifolds.- New York: Springer Verlag, 1995.
- [Lion98] Lion, J-M., Rolin, J-P.: Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytique.- in: Annales de l'Institut Fourier 48(1998).- pp 755-767
- [Lion97] Lion, J-M., Rolin, J-P.: Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles.- in: Annales de l'Institut Fourier 47(1997).- pp 859-884
- [L-P98] Lion, J.-M.: Densité des ensembles semi-pfaffiens.- in: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 8(1998).- pp 87-91
- [Mel] Melrose, R. B.: Differential Analysis on Manifolds with Corners.- <http://www-math.mit.edu/rbm/rbm-home.html>
- [Mil94] Milnor, J.: Euler characteristic and finitely additive Steiner measures.- in: Collected papers vol 1.- Houston: Publish or perish 1994.
- [O-T99] Orro, P, Trotman, D.: Cône normal à une stratification régulière.- preprint 1999
- [Par94] Parusiński, A.: Lipschitz Stratification of Subanalytic Sets.- in Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 27(1994).- pp 661-696

- [Pet98] Petrunin, A.: Parallel transportation for Alexandrov space with curvature bounded below.- in Geometric and Functional Analysis 8(1998).- pp 123-148
- [P-S98] Polthier, K., Schmies, M.: Straightest Geodesics on Polyhedral surfaces.- preprint 1998.
- [Sch00] Schürmann, J.: Constructible sheaves in geometric categories.- preprint 2000
- [Sha96] Sharpe, R. W.: Differential Geometry.- New York: Springer Verlag 1996.
- [Shen93] Shen, Z. M.: A regularity theorem for Alexandrov spaces.- in: Math. Nachrichten 164(1993).- pp 91-102
- [TaLe98] Ta Lê Loi: Verdier and strict Thom stratifications in o-minimal structures.- in: Illinois Journal of Mathematics 42(1998).- pp 347-356
- [Dri98] van den Dries, L.: Tame topology and O-minimal structures.- London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 248, Cambridge Press (1998)
- [D-M96] van den Dries, L., Miller, C.: Geometric Categories and O-minimal structures.- in: Duke Math. Journal 84(1996).- pp 497-540
- [Weyl39] Weyl, H.: On the volume of tubes.- in: Amer. J. Math. 61(1939).- pp 461-472
- [Wil96] Wilkie, A.: Model completeness results for expansion of the real field by restricted Pfaffian functions and the exponential function.- in: Journal of the American Math. Soc. 9(1996).- pp 1051-1094

Andreas Bernig, SFB-478 Geometrische Strukturen in der Mathematik, Hitdorfstr. 27, 48149 Münster, Germany

e-mail: bernig@math.uni-muenster.de